Math. U. 36 h Bugge

Thomas Bugge,

Justizraths und Professors der Mathematik und Astronomie an der Kopenhagener Universität, Lectors der Mathematik beym See-Etat, Mitgliedes der Gesellschaften der Wissenschaften und Akademien in London, Stockholm, Paris, Kopenhagen, Manheim und Drontheim,

Anleitung
zur
Algebra.

Aus dem Dänischen übersetzt

von

Ludolph Hermann Tobiesen,

Doctor der Philosophie und Mitgliede der physikalischen Gesellschaft in Göttingen.

Altona,

bey Johann Friedrich Hammerich.

1800.

Thomas Bugge,
Justizraths und Professors der Mathematik und Astronomie an der Kopenhagener Universität, Lectors der Mathematik beym See-Etat, Mitgliedes der Gesellschaften der Wissenschaften und Akademien in London, Stockholm, Paris, Kopenhagen, Manheim und Drontheim,

Lehrbuch der gesammten Mathematik

oder

Vorlesungen über die mathematischen Wissenschaften.

Zweyten Theils erste Abtheilung oder die Algebra.

Aus dem Dänischen übersetzt von

Ludolph Hermann Tobiesen,
Doctor der Philosophie und Mitgliede der physikalischen Gesellschaft in Göttingen.

Altona,
bey Johann Friedrich Hammerich.
1800.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Die Analysis oder Algebra.

Erstes Kapitel.

Die Buchstabenrechnung.

§. 1.

Die Buchstabenrechnung (calculus literalis, arithmetica universalis oder speciosa) lehrt mit Buchstaben zu rechnen, welche man für allgemeine Zeichen der Größen annimmt. In einem gegebenen Lehrsatze drückt man Größen einerley Art mit den nämlichen Buchstaben aus. Hat man z. B. in einem algebraischen Satze eine gewisse Anzahl von Meilen = a genannt, so darf man in demselben Satze keine andere Art von Größen mit a bezeichnen; hat man eine gewisse Anzahl von Tagen = b gesetzt, so muß man keine andere Größe = b setzen. Algebraische Größen also, welche mit einerley Buchstaben benannt sind, müssen als Größen einerley Art (quanti-

tates homogeneae) betrachtet werden. So sind 7 a und 5 a, ferner 4 m und 3 m als Größen einerley Art anzusehen. Sind aber die Buchstaben verschieden, so müssen die damit bezeichneten Größen als Größen verschiedener Art (quantitates heterogeneae) betrachtet werden; z. B. 3 d und 4 g, ferner a b und m n.

§. 2.

Wenn zwey Größen mit einander multiplicirt werden, so setzt man die Buchstaben, mit welchen sie bezeichnet sind, dicht neben einander ohne irgend ein Zeichen; z. B. a b bedeutet das Product aus a in b, ferner d e f das Product von d, e und f. Algebraische Größen können mit Zahlen multiplicirt werden; z. B. a mit 10 schreibt man 10 a und 7 b bedeutet, daß b mit 7 multiplicirt worden ist. Die Zahlen, mit welchen algebraische Größen multiplicirt sind, heißen ihre Coefficienten; z. B. in 4 b c und 12 g sind 4 und 12 die Coefficienten. Wenn man a mit der Einheit multiplicirt, so ist 1 a = a und 1 m n = m n, woraus folgt, daß jede algebraische Größe, die keinen Coefficienten hat, so angesehen werden muß, als sey ihr Coefficient = 1.

§. 3.

Entgegengesetzte Größen (quantitates oppositae) sind solche, deren eine die andere vermindert oder

ganz

ganz aufhebt; z. B. Schulden und Vermögen, Grade über und unter dem Gefrierpunct am Thermometer, Vorwärts- und Rückwärtsreisen.

Diejenige der entgegengesetzten Größen, welche man mit + (plus) bezeichnet, heißt die **positive** oder **bejahende Größe**; die andere, welche alsdann das Zeichen — (minus) erhält, die **negative** oder **verneinende Größe**. Es ist willkührlich, welche der entgegengesetzten Größen man mit + bezeichnen oder für positiv ansehen will; aber die andere wird dann nothwendig negativ und mit — bezeichnet. Ein Vermögen von 100 ℛ und eine Schuld von 100 ℛ sind beyde gleich wirkliche Größen; bezeichnet man nun das, was man besitzt, mit + und sieht es als eine positive Größe an, so muß die Schuld eine negative Größe seyn und zum Zeichen — haben. Aber diese — 100 ℛ sind gleichfalls wirkliche 100 ℛ, welche man einem andern schuldig ist und von diesem als + 100 ℛ angesehen werden. Eben so kann man 20 Meilen nach Norden mit + bezeichnen = + 20 und wenn man 8 Meilen nach Süden reiset, so muß man das — 8 schreiben. Man begreift leicht, daß man den Weg nach Süden mit + 8 und den Weg nach Norden mit — 20 hätte bezeichnen können. Wie man aber auch immer den Weg nach Süden bezeichnen mag, so ist er doch immer eine wirkliche Größe.

§. 4.

Wenn man sich von negativen Größen z. B. 14 Fuß rückwärts = — 14 Fuß und von einer Schuld von 300 ℛ = — 300 ℛ einen deutlichen Begriff machen will, so muß man sich durchaus zuvor vorstellen, daß man zuerst 7 Ellen vorwärts gegangen ist und einen Credit von 300 ℛ gehabt hat und dann das Entgegengesetzte dieser Größen nehmen (§. 3). Man kann sich also keine negative Größe — a vorstellen, wenn man sich nicht zuerst eine positive Größe + a denkt und das Entgegengesetzte derselben nimmt. Da nun alle positive Größen z. B. + 8 unläugbar aus der positiven Einheit + 1 entstehen, so ist auch + 1 der Ursprung aller negativen Größen. Die positive Größe entsteht nämlich, wenn man die positive Einheit mehrere Male nimmt und die negative Größe, wenn man die positive Einheit einige Male verneint d. h. das Entgegengesetzte derselben einige Male nimmt und aus der Ursache nimmt man die Einheit immer für positiv an.

§. 5.

Algebraische Größen zu addiren.

1) Wenn die Zeichen und Buchstaben dieselben sind, so können sie als Dinge einerley Art zusammengelegt werden (§. 1.). Z. B. + 10 a und + 1 a = + 11 a; — 3 b und — 5 b = — 8 b; + 3 ab und + 4 ab = + 7 ab.

$$
\begin{array}{r}
4a - 5b + c - 3d + 2e - 4g + h - 5xy \\
3a - 2b + c - 8d + 6e - g + 7h - 4xy \\
\hline
\text{Summe} = 7a - 7b + 2c - 11d + 8e - 5g + 8h - 9xy
\end{array}
$$

2) Sind die Buchstaben dieselben, aber die Zeichen verschieden, so hebt die eine entgegengesetzte Größe so viel in der andern auf, als sie kann und das, was übrig bleibt, bekommt das Zeichen des Größern. Wenn z. B. $+ 8a$ und $- 3a$ addirt werden sollen, so heben die 3 negativen a drey der positiven a auf und es bleiben noch 5 positive a über oder die Summe von $+ 8a$ und $- 3a$ ist $= + 5a$; ferner, wenn $- 6b$ und $+ 4b$ addirt werden sollen, so heben die 4 positiven b vier der 6 negativen b auf und es bleiben noch $- 2b$ über oder $- 6b$ und $+ 4b = - 2b$. Ist die positive Größe gleich der negativen Größe, so heben sie sich gänzlich auf und die Summe ist $= 0$; z. B. $+ a - a = 0$ und $- 12b + 12b = 0$.

$$
\begin{array}{r}
8a - 5b - 6c + d - 2e + 3f - 7g - 4h + 6k \\
-3a + 2b + 8c - d + 7e - 9f + 3g + 4h - 2k \\
\hline
\text{Summe} = + 5a - 3b + 2c \quad + 5e - 6f - 4g \quad + 4k
\end{array}
$$

3) Sind die algebraischen Größen mit verschiedenen Buchstaben ausgedrückt, so sind die Größen verschiedener Art (§. 1.). Man benenne z. B. eine gewisse Anzahl Tage, z. B. $7 = a$, so ist $3a =$

3 . 7 = 21 Tag.; bedeutet nun b eine gewisse Menge Meilen, welche man in einem Tage reiset, z. B. 8 Meilen, so ist 6 b = 6 . 8 = 48 Meil.; 3 a und 6 b können daher eben so wenig addirt werden als 21 Tage und 48 Meilen und 3 a und 6 b sind = 3 a + 6 b; eben so ist die Summe von + 4 c und — 5 d = + 4 c — 5 d.

In dem folgenden Beyspiel kommen alle Fälle vor:

$$\begin{array}{rl} & 8a - 5b + 4cc - 5gh + 2h - 3mnp - q \\ & 4a - 4b - 3cc + 2gh - 2h + 5mnp + r \\ \hline \text{Summe} = & 12a - 9b + cc - 3gh \quad + 2mnp - q + r \end{array}$$

§. 6.

Algebraische Größen zu subtrahiren.

1) Man verwandele alle Zeichen der abzuziehenden Größe in die entgegengesetzten + in — und — in +.

2) Man addire die Größen mit den veränderten Zeichen nach den bey der Addition gegebenen Regeln (§. 5.).

Erstes Beyspiel:

$$\begin{array}{rl} & 7 + 10 + 3 - 7 - 4 = 9 \\ & 12 - 5 + 3 - 8 + 4 = 6 \\ & - \quad + \quad - \quad + \quad - \\ \hline \text{Untersch.} = & - 5 + 15 \quad + 1 - 8 = 3. \end{array}$$

Zwey-

Zweytes Beyspiel:

$$\begin{array}{r} 5a - 2b + 7c + 8g - 3e + 8h - k \\ 4a - b + 9c - 3g - 5e - 3h + x \\ - \quad + \quad - \quad + \quad + \quad + \quad - \\ \hline \end{array}$$

Untersch. $= a - b - 2c + 11g + 2e + 11h - k - x$.

Drittes Beyspiel:

$$\begin{array}{r} - am + bg - 8cd + 5eh - 3gf + mn \\ am - 2bg - 8cd + 2eh - 7gf + 3mn \\ - \quad + \quad + \quad - \quad + \quad - \\ \hline \end{array}$$

Untersch. $= -2am + 3bg \quad + 3eh + 4gf - 2mn$

Beweis. Wenn von einer gegebenen Größe $+ 5a$ eine andere positive Größe $+ 4a$ subtrahirt wird, so sieht man leicht, daß der Unterschied $= + a$ ist oder $+ 5a - 4a = + a$; ferner wenn man von $- 2b$ subtrahirt $- b$, so ist klar, daß der Unterschied $= - b = - 2b + b$ ist.

Soll man von $+ 7c$ subtrahiren $+ 9c$, so muß man 9 negative c setzen, welche $+ 7c$ aufheben; der Unterschied ist also $= - 2c = + 7c - 9c$.

Wenn man von $+ 8g$ subtrahiren soll $- 3g$, so muß man 3 Negationen verneinen, also 3 positive g annehmen und der Unterschied ist $= + 11g = + 8g + 3g$. Im allgemeinen ist der Unterschied diejenige Größe, welche nebst der subtrahirten Größe so groß ist als diejenige Größe, von der die Subtraction geschehen ist (§. 12. Arith.). Wenn man also von $+ a$ subtra-

hirt + b, so ist der Unterschied = + a — b, weil diese Größe zu + b gelegt + a gibt oder + a — b + b = + a; wenn man von + a subtrahirt — b, so ist der Unterschied = + a + b, weil dieser Unterschied nebst — b die Größe + a geben muß oder + a + b — b = + a; eben so ist der Unterschied zwischen — a und + b = — a — b, weil — a — b + b = — a ist und der Unterschied zwischen — a und — b = — a + b, weil — a + b — b = — a ist. Von einer gegebenen Größe ± a eine andere Größe ± b subtrahiren, heißt zu ± a das Entgegengesetzte von ± b oder ∓ b addiren oder die Zeichen der abzuziehenden Größe in die entgegengesetzten verwandeln und dann addiren.

§. 7.

Eine zusammengesetzte Größe (quantitas complexa) heißt diejenige, welche aus mehrern mit + und — bezeichneten Größen besteht; z. B. a + b oder 3 c — 4 g. Ein Binomium oder eine Binomial-Größe besteht aus zwey Größen, die mit + oder — verbunden sind, z. B. a + b oder a — b; ein Trinomium oder Triominal-Größe besteht aus drey mit + oder — bezeichneten Größen, z. B. c — d + g oder ab + 2 cd + 3 gh; ein Monomium oder eine einfache Größe (quantitas incomplexa) ist jede Größe, welche mit keinen andern Größen verbunden ist, z. B. + d oder — gh und + mxy.

§. 8.

Algebraische Größen mit einander zu multipliciren.

1) Wenn zwey einfache algebraische Größen mit einander multiplicirt werden sollen, so setzt man sie bloß neben einander ohne ein besonderes Multiplicationszeichen; z. B. a multiplicirt mit b bezeichnet man ab; x multipl. mit yz = xyz (§. 2.). Sind aber Coefficienten da, so werden diese besonders mit einander multiplicirt; z. B. 3a multiplic. mit 4b = 12ab und 2a multiplic. mit 5ab = 10aab. In Rücksicht der Zeichen, welche der Multiplicandus und Multiplicator haben, ist es eine allgemeine Regel, **daß gleiche Zeichen der Factoren, d. h. + mit + oder — mit — im Product + und ungleiche Zeichen oder + mit — oder — mit + im Product — geben.** Z. B. + 3a multipl. mit + 3b gibt + 9ab; — 4a mit — 2b = + 8ab; + 5a mit — 4b = — 20ab; — 6a mit + 2b = — 12ab.

Beweis. Es sey der eine Factor a und der andere b, so sind in Absicht auf die Zeichen vier Veränderungen möglich.

1) + a mit + a. Wie sich die Einheit + 1 (§. 4.) zum Multiplicator verhält, so verhält sich der Multiplicandus zum Product (§. 15. Arith.), oder + 1

: + a = + b : Product, oder wie aus + 1 der Multiplicator + a entsteht, so entsteht aus + b das Product; wenn man aber + b einige Male zu sich selbst legt, so entsteht eine positive Größe (§. 5.); also ist das Product = + ab.

2) — a mit — b, so ist + 1 : — a = — b : Product oder wie aus dem Entgegengesetzten der Einheit — a (§. 4.) entsteht, so entsteht auch das Product nicht dadurch, daß man — b, sondern + b mehrere Male zu sich selbst legt; also ist das Product positiv und = + ab.

3) + a mit — b, so ist + 1 : + a = — b : Product oder wie aus der positiven Einheit + a entsteht, so entsteht aus dem — b das Product; aber die Summe negativer Größen ist negativ (§. 5.); also ist das Product = — ab.

4) — a mit + b, so ist + 1 : — a = + b : Product oder wie — a aus dem Entgegengesetzten der Einheit entsteht, so entsteht das Product aus dem Entgegengesetzten von + b oder wenn man — b einige Male zu sich selbst legt; also ist das Product — ab.

2) Wenn man eine zusammengesetzte algebraische Größe mit einer einfachen multipliciren soll, so multiplicirt man jede der Größen in der zusammengesetzten Größe mit der einfachen und befolgt die gegebenen Regeln wegen der Coefficienten und Zeichen. Z. B.:

$$\begin{array}{r} 4a - 5b + 6c + 3d - 5e + f + g \\ +4h \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Prod.} = +16ah - 20bh + 24ch + 12dh - 20eh + 4fh + 4gh$$

3) Wenn eine zusammengesetzte algebraische Größe mit einer andern zusammengesetzten Größe multiplicirt werden soll, so multiplicire man jede einfache Größe des Multiplicators mit dem Multiplicandus und addire so viel wie möglich diese einfachen Producte.

$$\begin{array}{r} 3a + 2b \\ 2a + 4b \\ \hline +12ab + 8bb \\ 6aa + 4ab \\ \hline 6aa + 16ab + 8bb \end{array} \qquad \begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline -ab - bb \\ aa + ab \\ \hline aa \quad - bb \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2a - 3b - 2c + d \\ a + 4b - 2c \\ \hline -4ac + 6bc + 4cc - 2dc \\ +8ab - 12bb - 8bc + 4bd \\ +2aa - 3ab - 2ac + ad \\ \hline +2aa + 5ab - 6ac - 12bb - 2bc + ad + 4cc + 4bd - 2cd \end{array}$$

§. 9.

Algebraische Größen zu dividiren.

1) Die Division einfacher algebraischen Größen drückt man durch das Divisionszeichen wie einen

Bruch

Bruch aus, welchen man, wenn es angeht, abkürzt und dieser abgekürzte Bruch ist der Quotient. Z. B. ab dividirt durch $a = \frac{ab}{a} = b$; $\frac{mnx}{mn} = x$; $8cd$ dividirt durch $4c = \frac{8cd}{4c} = 2d$; $4abc$ dividirt durch $4a = \frac{4abc}{4a} = bc$. Es ist klar, daß die Division auflöset, was die Multiplication zusammengesetzt hat und also, wenn das Product $4a$ mit bc (§. 8.) $= 4abc$ durch den einen Factor $4a$ dividirt wird, der andere Factor bc der Quotient werden müsse. Will man m durch n dividiren und läßt sich der daraus entstandene Bruch auf keine Weise abkürzen, so kann der Quotient nichts anders als $\frac{m}{n}$ seyn. In Absicht auf die Zeichen geben gleiche Zeichen im Dividendus und Divisor $+$ im Quotienten; ungleiche Zeichen aber $-$. Z. B. $\frac{+6aa}{+3a} = +2a$; $\frac{-8abc}{-2ab} = +4c$; $\frac{+amn}{-a} = -mn$ und $\frac{-xyy}{+xy} = -y$.

Beweis. Es sey der Dividendus ab und der Divisor b, so sind in Absicht auf die Zeichen $+$ und $-$ folgende Veränderungen möglich.

1) $+ ab$ durch $+ a$, so verhält sich der Divisor zum Dividendus wie die Einheit zum Quotienten (§. 20. Arith.), also $+ a : + ab = + 1$: Quotient. Da aus $+ a$ $+ ab$ entsteht, wenn man $+ a$ einige Male zu sich selbst legt, so muß auch aus $+ 1$ der Quotient entstehen, wenn man $+ 1$ einige Male zu sich selbst legt; der Quotient ist also positiv $= + b$ (§. 5.).

2) $- ab$ durch $- a$, so ist $- a : - ab = + 1$: Quotient oder wie aus $- a$ $- ab$ entsteht, wenn man $- a$ einige Male zu sich selbst legt, so entsteht auch der Quotient, wenn man $+ 1$ einige Male zu sich selbst addirt; der Quotient ist also positiv oder $\frac{- ab}{- a} = + b$.

3) $+ ab$ durch $- a$, so ist $- a : + ab = + 1$: Quotient oder wie aus dem Gegentheil von $- a$ oder $+ a$ $+ ab$ entsteht, so entsteht auch der Quotient aus dem Gegentheil der Einheit, er ist also negativ und $\frac{+ ab}{- a} = - b$ (§. 4.).

4) $- ab$ durch $+ a$, so ist $+ a : - ab = + 1$: Quotient oder wie $- ab$ aus dem Gegentheil von $+ a$ entsteht, so entsteht auch der Quotient aus dem Gegentheil der Einheit und ist negativ oder $\frac{- ab}{+ a} = - b$.

2) Wenn eine zusammengesetzte algebraische Größe durch eine andere zusammengesetzte algebraische Größe dividirt werden soll, so dividirt man das erste Glied des Dividendus durch das erste Glied des Divisors; das, was herauskommt, setzt man in die Stelle des Quotienten, multiplicirt es mit dem ganzen zusammengesetzten Divisor, setzt das Product unter den Dividendus und subtrahirt es. Das erste Glied des Restes dividirt man nun durch das erste Glied des Divisors, so hat man den zweyten Theil des Quotienten, welchen man mit dem ganzen Divisor multiplicirt und das Product subtrahirt. So fährt man fort, bis alle Glieder des Dividendus heruntergerückt sind. Man ersieht, daß die algebraische Division dieselbe ist, wie die bey Zahlen gebräuchliche (§. 23. Arith.).

Erstes Beyspiel:

Divisor	Dividendus	Quotient
$5a - 4b)$	$15aa - 7ab - 4bb$	$(3a + b$
	$15aa - 12ab$	
	$+$	
	$+ 5ab - 4bb$	
	$+ 5ab - 4bb$	
	$0 \quad 0$	

Zwey.

Zweytes Beyspiel:

$a+c)\ aa+ab+ac+bc\ (a+b$

$aa+\qquad ac$

$0+ab\qquad 0+bc$

$+ab\qquad +bc$

$0\qquad 0$

Drittes Beyspiel:

$3a-6)\ 6aaaa-96\ (2aaa+4aa+8a+16$

$6aaaa-12aaa$

$+12aaa-96$

$+12aaa-24aa$

$+24aa-96$

$+24aa-48a$

$+48a-96$

$+48a-96$

$0\qquad 0$

§. 10.

Wenn man die Multiplication oder Division zusammengesetzter algebraischer Größen bloß durch Zeichen zu erkennen geben will, so muß man die zusammengesetzten Größen in eine Parenthese einschließen oder über denselben einen Strich ziehen. Wenn $a+b$ mit $c+d$ multiplicirt werden soll, so schreibt man das entweder $(a+b).(c+d)$ oder $\overline{a+b}.\overline{c+d}$.

Zu-

Zuweilen kommen doppelte Parenthesen vor, wenn z. B. das Product $(a + b) . (c + d)$ durch $e + f + h$ dividirt werden sollte, so könnte man das so ausdrücken: $((a + b) . (c + d)) : (e + f + h)$ oder wie ein Bruch: $\frac{(a + b) . (c + d)}{e + f + h}$. Ferner $((3x + y + 4z) . a) : (m + n)$ bedeutet, daß die zusammengesetzte Größe $3x + y + 4z$ mit a multiplicirt und dies Product durch $m + n$ dividirt werden soll.

§. 11.

Bey der Addition und Subtraction algebraischer Brüche befolgt man dieselben Regeln wie bey Zahlbrüchen: man bringt sie auf gleiche Benennung (§. 38. Arith.) und addirt die Zähler (§. 39. Arith.) oder subtrahirt sie und behält den General-Nenner (§. 40. Arith.).

Beyspiele der Addition.

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$; $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{d}{e} = \frac{ade}{bde} + \frac{bce}{bde} + \frac{bdd}{bde} = \frac{ade + bce + bdd}{bde}$;

$m + \frac{n}{x} = \frac{mx + n}{x}$; $b + \frac{c}{d}$ und $f - \frac{q}{p}$ und $g + \frac{c}{p} = \frac{bd + c}{d}$ und $\frac{fp - q}{p}$ und $\frac{gp + c}{p}$. Diese auf gleiche Benennung gebracht, geben $\frac{bdpp + cpp}{dpp}$.

und $\frac{fppd - qpd}{dpp}$ und $\frac{gppd + cpd}{dpp}$ und wenn man die Zähler addirt, bekommt man

$$\frac{bdpp + cpp + fppd - qpd + gppd + cpd}{dpp}$$

und weil sie sich in jedem Gliede des Zählers und Nenners p findet, so kann man beyde abkürzen, wenn man durch p dividirt (§. 30. Arith.) und die Summe ist alsdann =

$$\frac{bdp + cp + fpd - qd + gpd + cd}{dp} =$$

$$b + f + g + \frac{cp - dq + cd}{dq}.$$

Beyspiele der Subtraction.

$$\frac{2a}{a+d} - \left(\frac{a+b-d}{a+d}\right) = \frac{2a - a - b + d}{a+d}$$

$$= \frac{a-b+d}{a+d}; \frac{mn}{p} - \frac{cd}{q} = \frac{mnq}{pq} - \frac{cdp}{pq}$$

$$= \frac{mnq - cdp}{pq}; \frac{a+c}{b+d} - \left(a + \frac{d}{p}\right) =$$

$$\frac{a+c}{b+d} - \left(\frac{ap+d}{p}\right) = \left(\frac{a+c}{b+d}\right) . p -$$

$$- \left(\frac{ap+d}{p}\right) . b + d = \frac{ap + cp}{bp + dp} -$$

$$\left(\frac{apb + db + adp + dd}{bp + dp}\right) =$$

$$\frac{ap + cp - apb - db - adp - dd}{bp + dp}.$$

§. 12.

Die Multiplication algebraischer Brüche mit algebraischen Brüchen geschieht dadurch, daß

 man

man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt (§. 42. Arith.)

Z. B. $\frac{+ab}{c} \cdot \frac{+d}{f} = \frac{+abd}{cf}$; $\frac{-3a}{4b} \cdot \frac{+5c}{6d} = \frac{-15ac}{24bd}$; $\left(\frac{3a-b}{2d+c}\right) \cdot \left(\frac{4a+2b}{d}\right) = \frac{12aa - 4ab + 6ab - 2bb}{2dd + cd} = \frac{12aa + 2ab - 2bb}{2dd + cd}$

Wenn $2a + \frac{b}{c} - 25$ mit $3b + 4c$ multiplicirt werden soll, so erhält man $\left(\frac{2ac + b - 25c}{c}\right) \cdot \frac{3b + 4c}{1}$ (§. 27. 34. Arith.) $= \frac{6abc + 3bb - 75bc + 8acc + 4bc - 100cc}{c}$.

§. 13.

Soll man einen algebraischen Bruch durch einen andern dividiren, so kehrt man den Divisor um und multiplicirt den Dividendus mit dem umgekehrten Divisor (§. 45. Arith.)

Z. B. $\frac{+abd}{cf} : \frac{-ab}{c} = \frac{+abd}{+cf} \cdot \frac{-c}{ab} = \frac{-abcd}{abcf} = \frac{-d}{f}$; $\left(\frac{a-b}{c}\right) : \frac{d}{e} = \left(\frac{a-b}{c}\right) \cdot \frac{e}{d} = \frac{ae - be}{cd}$; $\left(\frac{a+b}{d}\right) : \left(\frac{c-b}{a}\right) = \left(\frac{a+b}{d}\right) \cdot \left(\frac{a}{c-b}\right) = \frac{aa + ab}{cd - bd}$; $\left(\frac{a-b}{c+d}\right) :$

(x — y)

$$(x - y) = \left(\frac{a - b}{c + d}\right) : \left(\frac{x - y}{1}\right) = \left(\frac{a - b}{c + d}\right)$$

$$\cdot \left(\frac{1}{x - y}\right) = \frac{a - b}{cx + dx + cy - dy};$$

$$\left(\frac{aaa - abb}{c - d}\right) : \left(\frac{aa + 2ab + bb}{c - d}\right) =$$

$$\left(\frac{aaa - abb}{c - d}\right) \cdot \left(\frac{c - d}{aa + 2ab + bb}\right) =$$

$$\frac{(aaa - abb) \cdot (c - d)}{(aa + 2ab + bb) \cdot (c - d)} = \frac{aaa - abb}{aa + 2ab + bb}.$$

§. 14.

Wenn der Dividendus eine einfache algebraische Größe z. B. $= c$, und der Divisor eine zusammengesetzte algebraische Größe z. B. $= a + b$ ist, so läßt sich der Quotient durch eine unendliche Reihe angeben.

$$\frac{c}{a + b} = \frac{c}{a} - \frac{cb}{aa} + \frac{cb^2}{aaa} - \frac{cb^3}{aaaa} + \frac{cb^4}{aaaaa} \text{ u. s. w.}$$

$$= c \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{b}{aa} + \frac{b^2}{aaa} - \frac{b^3}{aaaa} + \frac{b^4}{aaaaa} \ldots\right)$$

Die Division sieht, wenn sie ordentlich aufgesetzt wird, folgender Gestalt aus:

$$a + b)\ c\ \left(\frac{c}{a} - \frac{bc}{aa} + \frac{b^2c}{aaa} - \frac{b^3c}{aaaa} + \ldots\right.$$

$$c + \frac{bc}{a}$$

$$\text{1ster Rest} = -\frac{bc}{a}$$

$$-\frac{bc}{a} - \frac{bbc}{aa}$$

$$\text{2ter Rest} = +\frac{bbc}{aa}$$

$$+\frac{bbc}{aa} + \frac{bbbc}{aaa}$$

$$\text{3ter Rest} = -\frac{bbbc}{aaa}$$

$$-\frac{bbbc}{aaa} + \frac{bbbbc}{aaaa}$$

$$\text{4ter Rest} = +\frac{bbbbc}{aaaa}$$

Man dividirt c durch das erste Glied des Divisors a und der Bruch $\frac{c}{a}$ ist der erste Theil des Quotienten, welchen man mit dem Divisor multiplicirt oder $(a+b) \cdot \frac{c}{a} = \frac{ac}{a} + \frac{bc}{a} = c + \frac{bc}{a}$ (§. 12.). Dies schreibt man unter den Dividendus und subtrahirt es, so erhält man den ersten Rest $-\frac{bc}{a}$. Diesen dividirt man wieder durch den ersten Theil des Divisors oder $-\frac{bc}{a} : \frac{a}{1} = -\frac{bc}{a} \cdot \frac{1}{a} = -\frac{bc}{aa}$, welches der zweyte Theil des Quotienten ist, der mit dem Divisor multiplicirt

werden

werden muß oder $(a+b)$. $-\frac{bc}{aa} = -\frac{abc}{aa} - \frac{bbc}{aa} = -\frac{bc}{a} - \frac{bbc}{aa}$. Dies schreibt man unter den Dividendus und subtrahirt es, so bekommt man den zweyten Rest $= +\frac{bbc}{aa}$. Diesen dividirt man durch das erste Glied des Divisors oder $+\frac{bbc}{aa} : \frac{a}{1} = +\frac{bbc}{aa} \cdot \frac{1}{a} = +\frac{bbc}{aaa}$, welches den dritten Theil des Quotienten gibt. Diesen multiplicirt man mit dem Divisor und $(a+b)$. $+\frac{bbc}{aaa} = +\frac{abbc}{aaa} + \frac{bbbc}{aaa} = +\frac{bbc}{aa} + \frac{bbbc}{aaa}$ und wenn man dies hinschreibt und subtrahirt, so findet man den dritten Rest $= -\frac{bbbc}{aaa}$ und wenn man dies durch a dividirt, findet man den vierten Theil des Quotienten $= -\frac{bbbc}{aaaa}$ u. s. w. Also hat man

$$\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} - \frac{bc}{aa} + \frac{b^2c}{aaa} - \frac{b^3c}{aaaa} + \text{u. s. w.}$$

Weil nun der Zähler in allen Theilen des Quotienten mit c multiplicirt ist, so kann c als ein gemeinschaftlicher Factor der ganzen Reihe abgesondert werden (§. 43. Arith.), also ist

$$\frac{c}{a+b} = c \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{b}{aa} + \frac{b^2}{aaa} - \frac{b^3}{aaaa} + \ldots\right)$$

und weil beständig ein Rest bleibt, so kann die Division ohne Ende fortgesetzt werden und daher entsteht die unendliche Reihe.

Anmerk. In der oben stehenden Reihe wechseln die Zeichen + und — ab, weil der Divisor a + b ist; nimmt man aber a — b zum Divisor, so findet keine Abwechselung der Zeichen Statt, sondern alle Glieder bekommen + und die Reihe hat folgende Gestalt:

$$\frac{c}{a-b} = \frac{c}{a} + \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} + \frac{b^3c}{a^4} + \frac{b^4c}{a^5} + \ldots$$

$$= c.\left(\frac{1}{a} + \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} + \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} + \ldots\right)$$

§. 15.

Diese allgemeine Formel kann man in andere durch besondere Fälle bestimmte Formeln verwandeln; z. B. wenn man eine unendliche Reihe für $\frac{1}{a+b}$ haben will, so hat man nur nöthig $c = 1$ anzunehmen und diesen Werth von c in jedes Glied zu setzen; nämlich:

$$\frac{c}{a+b} = \frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \ldots$$

Verlangt man eine unendliche Reihe für $\frac{1}{1+b}$, so ist $c = 1$ und $a = 1$; folglich

$$\frac{c}{a+b} = \frac{1}{1+b} = \frac{1}{1} - \frac{b}{1} + \frac{b^2}{1} - \frac{b^3}{1} + \ldots$$

$$= 1 - b + b^2 - b^3 + \ldots$$

legt

Legt man die in der vorigen Anmerkung angeführte Formel zum Grunde, nämlich

$$\frac{c}{a-b} = \frac{c}{a} + \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} + \frac{b^3c}{a^4} + \ldots$$

und nimmt $c = c$, $a = 1$ und $b = -1$, so ist

$$\frac{c}{a-b} = \frac{c}{1-1} = \frac{c}{0} = c + c + c + c + c + \ldots$$

$\frac{c}{0}$ gibt also einen aus einer unendlichen Anzahl von c bestehenden oder unendlichen Quotienten, welches bereits in der Arithmetik (§. 22.) bemerkt ist.

Man kann diese Formeln auch auf Zahlbrüche anwenden und jeden gegebenen Bruch durch eine unendliche Reihe ausdrücken; z. B. $\frac{1}{5} = \frac{1}{3+2}$, wo $c = 1$, $a = 3$ und $b = 2$ ist; also $\frac{c}{a} = \frac{1}{3}$; $-\frac{bc}{a^2} = -\frac{2}{9}$; $+\frac{b^2c}{a^3} = +\frac{4}{27}$; $-\frac{b^3c}{a^4} = -\frac{8}{81}$ u. s. w.; also $\frac{c}{a+b} = \frac{1}{3+2} = \frac{1}{5} = \frac{1}{3} - \frac{2}{9} + \frac{4}{27} - \frac{8}{81} + \ldots$

Der Sinn dieser unendlichen Reihe ist, daß wenn man den Werth von $\frac{1}{5}$ sucht und mit $\frac{1}{3}$ anfängt, so hat man zu viel, man subtrahirt also $\frac{2}{9}$; dann hat man aber zu wenig und addirt daher wieder $\frac{4}{27}$, welches aber wieder zu viel gibt, weßwegen man $\frac{8}{81}$ subtrahirt

und zu wenig erhält und so ohne Ende. Auf die Art nähert man sich dem Werthe von $\frac{1}{5}$ immer mehr, aber erreicht denselben erst, wenn die Reihe unendlich und $= \frac{1}{5}$ wird.

Der Bruch $\frac{1}{5}$ läßt sich noch auf eine andere Art ausdrücken, wenn man $c = 1$, $a = 1$ und $b = 4$ annimmt; also $\frac{c}{a+b} = \frac{1}{1+4} = \frac{1}{5} = 1 - 4 + 16 - 64 + 256$ u. s. w.

Solche Betrachtungen leiten auf den Begriff convergirender Reihen, welche sich beständig dem wahren Werthe oder dem richtigen Quotienten nähern; z. B. $\frac{1}{5} = \frac{1}{3} - \frac{2}{9} + \frac{4}{27} - \frac{8}{81}$ u. s. w. und divergirender Reihen, welche sich beständig von dem wahren Werthe oder Quotienten immer mehr entfernen; z. B. $\frac{1}{5} = 1 - 4 + 16 - 64 + 256$ u. s. w.

§. 16.

Wenn das erste Glied des Divisors a größer ist als das zweyte b oder $a > b$, so ist die Reihe convergirend; ist aber $a < b$, so ist sie divergirend, wenn man $\frac{c}{a+b}$ durch eine unendliche Reihe ausdrücken will.

Nimmt man $a > b$ an und dividirt beyde durch a^2, so ist $\frac{a}{a^2} > \frac{b}{a^2}$ (§. 6. Arith.). Den ersten Bruch kann man abkürzen, wenn man Zähler und Nenner durch

durch a dividirt (§. 30. Arith.); also $\frac{1}{a} > \frac{b}{aa}$ oder der erste Bruch größer als der zweyte.

Weil also $\frac{1}{a} > \frac{b}{a^2}$ ist, so ist, wenn man mit b multiplicirt, $\frac{b}{a} > \frac{b^2}{aa}$ und durch die Division mit a $\frac{b}{a^2} > \frac{b^2}{a^3}$ oder das zweyte Glied größer als das dritte. Es ist also $\frac{b}{a^2} > \frac{b^2}{a^3}$, also, wenn man mit b multiplicirt, $\frac{b^2}{a^2} > \frac{b^3}{a^3}$ und durch die Division mit a $\frac{b^2}{a^3} > \frac{b^3}{a^4}$ oder das dritte Glied größer als das vierte. Auf eben die Art läßt sich beweisen, daß jedes vorhergehende Glied größer ist als das nächstfolgende; die Reihe ist also convergirend (§. 15.).

Ist a < b, so dividire man durch a^2, so ist $\frac{a}{a^2} < \frac{b}{a^2}$ oder $\frac{1}{a} < \frac{b}{a^2}$ und durch die Multiplication mit b und die Division durch a $\frac{b}{a^2} < \frac{b^2}{a^3}$ und auf eben die Art kann man beweisen, daß jedes vorhergehende Glied kleiner ist als das nächstfolgende; die Reihe ist also divergirend.

§. 17.

Will man diese Reihen auf Zahlen anwenden, so convergiren sie desto schneller, je größer a gegen b ist,

 und

und man kann, ohne einen erheblichen Fehler zu begehen, sich mit wenigen Gliedern begnügen. Z. B. $\frac{1}{101}$ $= \frac{1}{100 + 1}$, also $c = 1$, $b = 1$ und $a = 100$; folglich $\frac{c}{a + b} = \frac{1}{100 + 1} = \frac{1}{101} = \frac{1}{100} - \frac{1}{10000} + \frac{1}{1000000} \ldots$

Will man alles auf Decimalbrüche reduciren, so ist $\frac{1}{101} = 0{,}01 - 0{,}0001 + 0{,}000001 \ldots$ Nimmt man nur zwey Glieder, so ist $\frac{1}{101} = 0{,}01 - 0{,}0001 = 0{,}0100 - 0{,}0001 = 0{,}0099$ (§. 50. Arith.). Um nun zu sehen, wie viel man fehle, bringe man beyde Brüche $\frac{1}{101}$ und $\frac{99}{10000}$ auf gleiche Benennung, so erhält man $\frac{10000}{1010000}$ und $\frac{9999}{1010000}$, welche Brüche beynahe gleich sind und nur $\frac{1}{1010000}$ von einander unterschieden sind.

Will man den Bruch $\frac{1}{11} = \frac{1}{10 + 1}$ durch eine unendliche Reihe ausdrücken, so ist $\frac{1}{11} = \frac{1}{10} - \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} - \frac{1}{10000} +$ u. s. w. Nimmt man nur die beyden ersten Glieder, so ist $\frac{1}{11} = \frac{1}{10} - \frac{1}{100} = \frac{10}{100} - \frac{1}{100} = \frac{9}{100}$ und will man wissen, wie nahe dieser Bruch $\frac{9}{100}$ dem Bruche $\frac{1}{11}$ kommt, so bringe man beyde auf gleiche Benennung: $\frac{100}{1100}$ und $\frac{99}{1100}$, welche nur $\frac{1}{1100}$ von einander abweichen. Wollte man $\frac{1}{11}$ noch näher haben, so müßte man drey Glieder nehmen; $\frac{1}{11} = \frac{1}{10} - \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} = \frac{9}{100} + \frac{1}{1000}$

$=$

$= \frac{90}{1000} + \frac{1}{1000} = \frac{91}{1000}$. Will man dies mit $\frac{1}{11}$ vergleichen, so bringe man beyde auf gleiche Benennung, so hat man $\frac{1}{11} = \frac{1000}{11000}$ und $\frac{91}{1000} = \frac{1001}{11000}$, woraus man ersieht, daß der Unterschied kleiner geworden ist, aber bey drey Gliedern noch immer $= \frac{1}{11000}$ ist, welcher noch kleiner werden würde, wenn man noch mehr Glieder nähme.

§. 18.

Der Bruch $\frac{1}{a+b}$ (§. 15.) kann auf eine doppelte Weise durch eine unendliche Reihe ausgedrückt werden, zuerst wenn man den Divisor $= a + b$ und darauf $= b + a$ annimmt und dann erhält man:

$$A) \frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \ldots\ldots$$

$$B) \frac{1}{b+a} = \frac{1}{b} - \frac{a}{b^2} + \frac{a^2}{b^3} - \frac{a^3}{b^4} + \ldots\ldots$$

Ist nun $a > b$, so ist die unendliche Reihe A convergirend und B divergirend (§. 16.); ist aber $a < b$, so ist die unendliche Reihe A divergirend und B convergirend. Man begreift daraus, daß, wenn $a > b$ ist, man die Reihe A; hingegen, wenn $a < b$, man die Reihe B brauchen müsse, um den Quotienten $\frac{1}{a+b}$ zu finden.

Zweytes Kapitel.

Auflösung einfacher Gleichungen mit Einer unbekannten Größe.

§. 19.

Die **Algebra** ist derjenige Theil der analytischen Wissenschaften, welcher lehrt, wie man Aufgaben durch Aequationen oder Gleichungen auflöset. Gegebene Größen bezeichnet man mit den ersten Buchstaben des Alphabets a, b, c, d, e, f u. s. w.; aber unbekannte und gesuchte Größen mit den letzten Buchstaben x, y, z, u. s. w. Eine **Aequation** oder **Gleichung** ist ein doppelter aber gleich bedeutender Ausdruck einer und derselben Größe, so wie die Natur der Aufgabe es mit sich bringt und in welchem gewöhnlich bekannte und unbekannte Größen mit einander vermischt sind. Z. B. $3x + 7 = 100$; $16x + 5 = 8 - 3x$; $ax = m + bx$, $a = \frac{b}{x}$ sind Gleichungen. **Eine Seite der Gleichung** nennt man die Größen, welche auf einer Seite des Gleichheitszeichen stehen, z. B. in $3x - 12 = 14 + x$ ist $3x - 12$ die eine und $14 + x$ die andere Seite der Gleichung.

Glieder der Gleichung sind die Größen der Gleichung, welche mit + und − verbunden sind; z. B. im letzten Beyspiel ist $3x$ das eine und -12

das

das zweyte Glied der einen Seite und 14 das eine und $+ x$ das andere Glied der andern Seite. **Eine einfache Gleichung** ist diejenige, in der nur ein einfaches x (nicht mehrere Male mit sich selbst multiplicirt) vorkommt. Beyspiele sind alle oben angeführte Gleichungen; aber $4 + x^2 = 104$ ist keine einfache Gleichung und noch weniger $a + b = 8 x^2 + x^3$.

§. 20.

Eine Gleichung auflösen, in welcher unbekannte und bekannte Größen mit einander verbunden sind, heißt sie so behandeln, daß man durch richtige Schlüsse den Wehrt der unbekannten Größen findet und sie in gegebenen und unbekannten Größen ausdrückt. Z. B. $3 x + 7 = 100$ wird aufgelöset, wenn man sie so behandelt, daß man findet, wie groß x ist, nämlich $x = 31$. Die Auflösung der Gleichungen gründet sich auf die unumstößlichen Grundsätze, daß, wenn man Gleiches addirt oder subtrahirt, gleiche Summen oder Differenzen; daß, wenn man Gleiches mit Gleichem multiplicirt oder dividirt, gleiche Producte oder Quotienten herauskommen; daß, wenn die Wurzeln gleich sind, auch die Quadrate und Kubi und, wenn diese gleich sind, es auch die Wurzeln sind (§ .6 und 59. Arith).

§. 21.

Wenn Bekanntes und Unbekanntes bloß durch die Addition und Subtraction oder durch

$+$ und $-$ mit einander verbunden ist, so kann man die Gleichung auflösen, wenn man das Addirte subtrahirt und das Subtrahirte addirt, oder jedes Glied kann von der einen Seite der Gleichung mit dem entgegengesetzten Zeichen auf die andere Seite gebracht werden.

Z. B. $x + 8 = 12$; wenn man auf beyden Seiten 8 subtrahirt, erhält man $x = 12 - 8 = 4$; ist $b + x = a$, so ist $x = a - b$; ferner $x - 12 = 30$, man addire auf beyden Seiten 12, so ist $x - 12 + 12 = 30 + 12$ oder $x = 62$; ferner $x + c = 3a + 2b$, so ist $x = 3a + 2b - c$; ferner $x - 5a + 8b = 10a + 2b$, so ist $x = 10a + 2b + 5a - 8b = 15a - 6b$.

Anmerk. Befindet sich das unbekannte x auf beyden Seiten der Gleichung, so muß man es auf Eine Seite bringen, bevor man die Gleichung weiter auflösen kann. Z. B. $8x - 12 = 7x - 4$; wenn man nun $+ 7x$ mit dem entgegengesetzten Zeichen auf die andere Seite bringt oder es auf beyden Seiten subtrahirt, so ist $x - 12 = -4$ und $x = +12 - 4 = 8$. Hierbey muß man nur darauf merken, daß man einen positiven Werth von x findet, wie im vorigen Beyspiel geschah, indem man $7x$ von der rechten Seite auf die linke brachte; hätte man aber $8x$ auf die rechte Seite

Seite gebracht, so würde man folgende Gleichung erhalten haben: $-12 = -x - 4$ und $-12 + 4 = -x = -8$. Hieraus folgt, daß wenn eine Gleichung gegeben ist, man dieselbe in eine andere Gleichung verwandeln könne, wenn man alle Zeichen verändert: $+$ in $-$ und $-$ in $+$. Z. B. $a - x = b + c$ gibt $-a + x = -b - c$ und $x = a - b - c$.

§. 22.

Ist das Unbekannte durch die Multiplication mit dem Bekannten verbunden, so löset man die Gleichung auf, wenn man beyde Seiten der Gleichung mit den bekannten Factoren des Unbekannten dividirt.

Ist $3x = 93$, so dividirt man auf beyden Seiten durch 3 oder $\frac{3x}{3} = \frac{93}{3}$ oder $x = 31$; ferner $ax = b$, so ist $\frac{ax}{a} = \frac{b}{a}$ oder $x = \frac{b}{a}$. Ist das Unbekannte durch $+$ oder $-$ mit bekannten Größen verbunden, so muß man diese zuerst auf Eine Seite bringen; z. B. $4x + 16 = 48$, so ist $4x = 48 - 16 = 32$ und $\frac{4x}{4} = \frac{32}{4}$ oder $x = 8$. Ferner $ax + b - c = d$, so ist $ax = d - b + c$ und, wenn

man

man nun allenthalben mit a dividirt, $x = \frac{d - b + c}{a}$.
Es kann sich auch treffen, daß x in mehrern Gliedern der Gleichung entweder allein oder mit bekannten Größen multiplicirt vorkommt und dann muß man die eine Seite der Gleichung als ein Product ansehen, dessen einer Factor x und der andere Factor eine Sammlung bekannter Größen ist. Z. B. $ax - bx + cx = d$ gibt $(a - b + c) . x = d$ (§. 8.) und folglich, wenn man mit $(a - b + c)$ dividirt, $x = \frac{d}{(a - b + c)}$.
In der Gleichung $ax - x = b$ scheint es schwerer den Factor zu x zu finden. Da aber jede Größe, welche keinen andern Factor hat, so angesehen werden kann, als habe sie zum Factor 1, so ist $ax - x = (a - 1) . x = b$ und also, wenn man durch $(a - 1)$ dividirt, $x = \frac{b}{(a - 1)}$.

§. 23.

Ist die unbekannte Größe durch bekannte Größen dividirt, so löset man die Gleichung auf, wenn man mit dem Divisor multiplicirt, wobey man nur bemerken muß, daß die mit + und — verbundenen Größen erst auf die andere Seite gebracht werden müssen. Z. B. $\frac{x}{8} = 10$, also $x = 80$; ferner $\frac{x}{2a - 3b} + 2b = 8a$, so muß man erst +

2b auf die andere Seite bringen oder $\frac{x}{2a - 3b} = 8a - 2b$ und, wenn man mit $+ 2a - 3b$ multiplicirt, $x = (8a - 2b).(2a - 3b) = 16a^2 - 28ab + 6b^2$.

Hieher gehört auch noch der Fall, **wenn die unbekannte Größe selbst Divisor bekannter Größen ist, wo man dann mit der unbekannten multipliciren muß.** Z. B. $\frac{a}{x} = b$, so multiplicirt man mit x und erhält $a = bx$ und $\frac{a}{b} = x$; ferner $\frac{200}{x + 2} = 40$, so multiplicirt man zuerst mit $x + 2$ und erhält $200 = (x + 2).40 = 40x + 80$ und $200 - 80 = 40x = 120$ und durch die Division mit 40 bekommt man $\frac{120}{40} = 3 = x$.

Bey der Auflösung der Gleichungen ist wohl zu bemerken, daß, wenn entweder das Unbekannte durch das Bekannte oder das Bekannte durch das Unbekannte dividirt ist, solche Gleichungen nicht aufgelöset werden können, ehe man durch die Multiplication die Division gehoben hat.

Weil $\frac{1}{3}x = \frac{x}{3}$; $\frac{2}{3}x = \frac{2x}{3}$; $\frac{4}{5}x = \frac{4x}{5}$ ist, so müssen alle Gleichungen mit Brüchen nach diesen Regeln aufgelöset werden. Z. B. $\frac{4}{5}x = 8$ muß erst mit 5 multiplicirt oder $4x = 40$ und dann durch 4 dividirt werden oder $x = \frac{40}{4} = 10$.

Ist $x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 44$ gegeben, so müssen alle diese Größen zuerst auf gleiche Benennung gebracht werden; nun ist $x = \frac{6x}{6}$, $\frac{1}{2}x = \frac{3x}{6}$ und $\frac{1}{3}x = \frac{2x}{6}$ (§. 37. Arith.); also $x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = \frac{6x}{6} + \frac{3x}{6} + \frac{2x}{6} = \frac{6x + 3x + 2x}{6} = \frac{11x}{6} = 44$, $11x = 264$ und $x = 24$.

§. 24.

Wenn man eine Aufgabe algebraisch auflösen will, so muß man folgende Regeln beobachten:

1) Die bekannten und gegebenen Größen benenne man mit den ersten kleinen Buchstaben a, b, c, d, e, u. s. w. und die unbekannten mit den letzten Buchstaben x, y, z, u, u. s. w. Sind die gegebenen Größen Zahlen und verlangt man nicht eine allgemeine Regel der Auflösung, so kann man die Zahlen beybehalten; aber dann paßt die Auflösung nur für einen gegebenen einzelnen Fall.

2) Nachdem die Benennung geschehen ist, bezeichne man durch eine Gleichung die Verbindung, in welcher die gegebenen Größen der Aufgabe mit den unbekannten oder gesuchten Größen stehen. Diese Gleichung zu bilden ist in den meisten Fällen nicht schwer, wenn man nur durch algebraische Zeichen die Bedingungen der Aufgabe ausdrückt.

Ist

Ist nur Eine unbekannte Größe da, so bedarf es nur Einer Gleichung; sind aber mehrere vorhanden, so sind so viele Gleichungen nöthig als unbekannte Größen vorhanden sind; lassen sich aber aus den Bedingungen der Aufgabe nicht so viele Grundgleichungen entwickeln als unbekannte Größen gesucht werden, so läßt sich auch keine bestimmte Antwort der vorgelegten Frage geben.

3) Wird nur Eine unbekannte Größe gesucht und hat man nach den vorhin gegebenen Regeln die Gleichung aufgelöset und den Werth der unbekannten Größe in bekannten gefunden (§. 20-23.), so hat man die gegebene Aufgabe aufgelöset.

§. 25.

Erste Aufgabe. **Eine Zahl von der Beschaffenheit zu finden, daß wenn man zum Zwiefachen derselben 16 addirt, die Summe = 188 ist.**

In Worten:	In Zeichen ausgedrückt:
Eine Zahl zu finden,	x
zu deren Zwiefachem	$2x$
man 16 addirt und	$2x + 16$
zur Summe 188 erhält.	$2x + 16 = 188$

Die aus den Bedingungen der Aufgabe sich ergebende Gleichung ist $2x + 16 = 188$; man bringe 16 mit dem entgegengesetzten Zeichen auf die andere

Seite, so hat man $2x = 188 - 16 = 172$ (§. 21.); man dividire durch 2, so ist $x = \frac{172}{2} = 86$ (§. 22.). Man kann die Auflösung prüfen, wenn man 86 zweymal nimmt und dazu 16 addirt, welches 188 geben muß.

§. 26.

Zweyte Aufgabe. Eine Zahl zu finden, welche, wenn 9 von derselben subtrahirt und die Differenz durch 5 dividirt wird, 13 gibt.

In Worten:	In algebraischen Zeichen:
Eine Zahl zu finden,	x
von welcher 9 subtrahirt und die Differenz	$x - 9$
durch 5 dividirt wird;	$\frac{x - 9}{5}$
der Quotient ist 13.	$\frac{x - 9}{5} = 13.$

Um diese Gleichung aufzulösen, muß man zuerst mit 5 multipliciren: $x - 9 = 65$ (§. 23.); wird -9 auf die andere Seite gebracht, so erhält man $x = 65 + 9 = 74$ (§. 21.). Die Probe besteht darin, daß, wenn man von 74 die Zahl 9 subtrahirt und diesen Unterschied 65 durch 5 dividirt, man 13 bekommt, so wie die Bedingung der Aufgabe es erfoderte.

§. 27.

Dritte Aufgabe. Eine Zahl zu finden, deren Drittheil um 16 größer ist als der vierte Theil oder

oder deren dritter Theil so groß ist als der vierte Theil nebst 16.

Man nenne die gesuchte Zahl x, so ist der dritte Theil derselben $= \frac{x}{3}$ und der vierte Theil $= \frac{x}{4}$. Da nun der dritte Theil so groß seyn soll als der vierte nebst 16, so ist

$$\frac{x}{3} = \frac{x}{4} + 16$$

(§. 21.)

$$\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 16$$

$$\frac{4x - 3x}{12} = 16$$ (die Brüche auf gleiche Benennung gebracht) (§. 23.)

$$\frac{x}{12} = 16$$

$$x = 16 \cdot 12 = 192$$ (mit 12 multipl.)

§. 28.

In algebraischen Aufgaben scheint beym ersten Anblick mehr als Eine unbekannte Größe seyn zu können; aber bey näherer Ueberlegung wird man befinden, daß eine der unbekannten Größen die übrigen bestimme, so daß, wenn jene gefunden ist, man nach den Bedingungen der Aufgabe die andern zugleich weiß. In allen solchen Fällen sucht man also nur Eine der unbekannten Größen, durch welche sich die übrigen von selbst bestimmen.

§. 29.

Vierte Aufgabe. Man soll 968 Rthl. dergestalt unter 5 Personen A, B, C, D, E vertheilen, daß die Antheile derselben in einer geometrischen Progression, deren Exponent = 3, wachsen und A den kleinsten Antheil erhält.

Es sey A's oder der kleinste Antheil = x, so lassen sich alle übrige Antheile durch x angeben. B soll nämlich dreymal mehr als A oder 3 x; C dreymal mehr als B oder neunmal mehr als A oder 9 x; D dreymal mehr als C oder 27 x und E 81 x erhalten. Alle diese Antheile müssen zusammen das gegebene Kapital von 968 Rthl. ausmachen; also

$$x + 3x + 9x + 27x + 81x = 968$$

oder

$$121x = 968 \text{ (§. 5.) und}$$

$$x = \tfrac{968}{121} = 8 \text{ (§. 22.)}$$

also erhält A = . 8 Rthl.

B = 24 —

C = 72 —

D = 216 —

E = 648 —

Summe = 968 Rthl.

§. 30.

Fünfte Aufgabe. Eine Lotterie besteht aus 100000 Loosen; die Hälfte der gewinnenden

Loose

Loose addirt zum dritten Theil der verlierenden beträgt 35000; es wird gefragt, wie viele verlierende Loose in dieser Lotterie sind?

Man nenne die Zahl der Gewinne $= x$, so ist die Anzahl der verlierenden Loose $= 100000 - x$, die Hälfte der Gewinne $= \frac{x}{2}$, der dritte Theil der verlierenden Loose $= \frac{100000 - x}{3}$. Diese zusammen betragen 35000; also

$$\frac{x}{2} + \frac{100000 - x}{3} = 35000$$

$$x + \frac{200000 - 2x}{3} = 70000 \text{ (§. 23)}$$

$$3x + 200000 - 2x = 210000 \text{ (§. 23).}$$

$$3x - 2x = 210000 - 200000 \text{ (§. 21).}$$

$$x = 10000 \text{ (§. 3).}$$

Der Gewinne sind also 10000 und wenn man diese von den sämmtlichen Loosen subtrahirt, so bleiben 90000 verlierende Loose. Die Hälfte von 10000 ist $= 5000$ und der dritte Theil der verlierenden Loose $=$ 30000, zusammen also 35000, so wie die Bedingung der Aufgabe es erfoderte.

§. 31.

Sechste Aufgabe. Zwey Personen A und B haben beyde gleiche Einkünfte; A erspart jähr-

 lich

lich den fünften Theil derselben und B verzehrt jährlich 600 ℛ mehr als A. Nach 3 Jahren zeigt es sich, daß B 1000 ℛ Schulden hat; wie groß waren die Einkünfte und wie viel hat jeder jährlich verzehrt?

Man nenne ihre jährlichen Einkünfte $= x$; hievon ersparet A jährlich den fünften Theil $= \frac{x}{5}$, also verzehrt er nur jährlich $x - \frac{x}{5} = \frac{5x}{5} - \frac{x}{5} = \frac{4x}{5}$. Nun verbraucht aber B 600 ℛ mehr als A, also jährlich $\frac{4x}{5} + 600$ und wenn man davon seine jährlichen Einkünfte $= x$ subtrahirt, so findet man, wie viel er jährlich in Schulden kommt $= \frac{4x}{5} + 600 - x$. Weil er nun nach Verlauf von 3 Jahren in 1000 ℛ Schulden gerathen ist, so hat man:

$$\left(\frac{4x}{5} + 600 - x\right) . 3 = 1000$$

$$\frac{12x}{5} + 1800 - 3x = 1000 \text{ (multipl. mit 3) (§. 8.)}$$

$$12x + 9000 - 15x = 5000 \text{ (multipl. mit 5) (§. 23.)}$$

$$9000 - 3x = 5000 \text{ (§. 6.)}$$

$$9000 - 5000 = 3x \text{ (§. 21.)}$$

$$\frac{4000}{3} = 1333\tfrac{1}{3} = x \text{ (§. 22).}$$

Ihre

Ihre jährlichen Einkünfte sind also $1333\frac{1}{3}$ ℛ𝔈.

Hievon hat A jährlich nur $\frac{4}{5} = \frac{4000}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16000}{15}$ $= 1066\frac{2}{3}$ ℛ𝔈 verzehrt, B aber jährlich $1666\frac{2}{3}$ gebraucht, also in 3 Jahren $= 1666\frac{2}{3} \cdot 3 = 5000$ ℛ𝔈; aber in diesen 3 Jahren waren seine Einkünfte nur 4000 ℛ𝔈; also hat er 1000 ℛ𝔈 Schulden gemacht.

§. 32.

Siebente Aufgabe. **Zwey Zahlen zu finden, deren eine viermal größer als die andere ist und welche zugleich die Eigenschaft haben sollen, daß, wenn ich zu jeder derselben 20 addire, ihre Summen sich wie 5 : 7 verhalten.**

Die kleinere Zahl sey $= x$, so soll die andere viermal so groß $= 4x$ seyn; addirt man nun zu beyden 20, so hat man $x + 20$ und $4x + 20$, diese Summen sollen sich wie 5 : 7 verhalten; also

$$\underline{x + 20 : 4x + 20 = 5 : 7}$$

$$\underline{7x + 140 = 20x + 100} \quad (\text{§. 78. Arith.}).$$

$$\underline{140 = 13x + 100} \quad (\text{§. 21}).$$

$$\underline{40 = 13x} \quad (\text{§. 21}).$$

$$\frac{40}{13} = 3\frac{1}{13} \cdot = x \quad (\text{§. 22}).$$

Zur Prüfung der Auflösung setze man $3\frac{1}{13} + 20 : 4 \cdot 3\frac{1}{13} + 20 = 5 : 7$ und wenn man in den beyden ersten Gliedern alles zu Bruch macht, ist $\frac{40}{13}$

$+ \frac{260}{13} : \frac{160}{13} + \frac{260}{13} = 5 : 7$ oder $\frac{300}{13} : \frac{420}{13} = 5 : 7$ und weil dividirte Zahlen sich wie die Quotienten verhalten, ist $300 : 420 = 30 : 42 = 5 : 7$.

Anmerk. Aus dieser Auflösung ersieht man, daß, wenn die Bedingungen der Aufgabe nicht zu einer Gleichung sondern zu einer Proportion führen, man die Grundgleiche finde, wenn man bey einer geometrischen Proportion die äußern und mittlern Glieder multiplicirt und bey einer arithmetischen addirt (§. 71. 78. Arith.).

§. 33.

In den vorigen Aufgaben waren die gegebenen Dinge immer nur Zahlen und die Auflösung paßte nur für die gegebenen einzelnen Beyspiele. Die folgenden Beyspiele werden durch den Gebrauch der Buchstaben allgemein seyn und die Auflösung derselben allgemeine Regeln enthalten, nach welchen alle Aufgaben derselben Art sich auflösen lassen.

Achte Aufgabe. Eine gegebene Zahl a wird durch eine unbekannte Zahl x dividirt; zum Quotienten $\frac{a}{x}$ eine andere gegebene Zahl b addirt und von der Summe $\frac{a}{x} + b$ eine dritte gegebene Zahl c subtrahirt, welches eine vierte gegebene Zahl d gibt; man fragt nach dem unbekannten Divisor x.

Nach

Nach den Bedingungen der Aufgabe kommt folgende Gleichung zum Vorschein:

$$\frac{a}{x} + b - c = d$$

$$a + bx - cx = dx \text{ (mit x multipl.)}$$

$$a - cx = dx - bx$$

$$a = dx - bx + cx = (d-b+c).x$$

$$\frac{a}{d-b+c} = x.$$

Es sey $a = 60$, $b = 20$, $c = 4$, $d = 100$, so ist $\frac{a}{d-b+c} = \frac{60}{100-20+4} = \frac{60}{84} = \frac{5}{7} = x$. Denn $60 : \frac{5}{7} = \frac{420}{5} = 84$, zu diesem Quotienten 20 addirt und 4 subtrahirt, giebt $84 + 20 - 4 = 100$, wie verlangt ward.

§. 34.

Neunte Aufgabe. Zwey Personen A und B sollen ein gegebenes Kapital = a dergestalt theilen, daß, wenn man A's Antheil durch 2 dividirt und B's Antheil mit 2 multiplicirt und diese wieder addirt, das gegebene Kapital a herauskommt.

Man

Man nenne A's Antheil $= x$, so ist B's Antheil $= a - x$; also

$$2a - 2x + \frac{x}{2} = a$$

$$4a - 4x + x = 2a$$

$$4a - 3x = 2a$$

$$4a - 2a = 3x$$

$$2a = 3x$$

$$\frac{2a}{3} = x$$

B's Antheil ist $= a - x = a - \frac{2a}{3} = \frac{3a}{3} - \frac{2a}{3}$ $= \frac{1}{3} a$. Es sey $a = 180$ Rthl., so ist $x = \frac{2}{3} \cdot 180 =$ 120 Rthl. = A's Antheil; für B bleibt also 60 Rthl. und nach der Bedingung der Aufgabe ist $\frac{120}{2} + 120 = 180$.

§. 35.

Zehnte Aufgabe. **Ein Centner Kupfer kostet a Rthl. und ein Centner Zinn b Rthl.; diese beyden Metalle sollen zu einer Masse zusammengeschmelzt werden von n Centner Gewicht, so daß der Centner der Mischung für c Rthl. verkauft werden kann; es wird gefragt, wie viele Centner jedes Metalls man zu dieser Mischung nehmen müsse.**

Die Anzahl der Centner Kupfer, die man zu dieser Mischung nehmen muß, nenne man $= x$, so ist die

die Anzahl der Centner Zinn $= n - x$. Der Preis eines Centners Kupfer ist $= a$, also für $x = ax$; der Centner Zinn kostet b, also für $n - x = bn - bx$; also ist der Werth des Kupfers und des Zinnes in der Mischung $= ax + bn - bx$; die Mischung soll n Centner enthalten und der Werth der ganzen Mischung $= nc$ seyn.

$$ax + bn - bx = cn$$

$$ax - bx = cn - bn$$

$$(a - b) . x = (c - b) . n$$

$$x = \frac{(c - b) . n}{(a - b)}$$

Die Menge des Kupfers ist also $= \frac{(c - b)\, n}{(a - b)}$

und die Menge des Zinnes $= n - \frac{(c - b) . n}{a - b} =$

$\frac{an - bn}{a - b} - \left(\frac{cn - bn}{a - b}\right) = \frac{an - bn - cn + bn}{a - b}$

$= \frac{an - cn}{a - b} = \frac{(a - c) . n}{(a - b)}$ (§. 3).

Z. B. $a = 30$ rℓ, $b = 12$ rℓ, $c = 24$ rℓ, $n = 54$ Centner, so ist die Menge des Kupfers $=$

$x = \frac{(c - b) . n}{(a - b)} = \frac{(24 - 12) . 54}{30 - 12} = \frac{12 . 54}{18} =$

$\frac{12 . 54}{18} = 36$ Centner; die Menge des Zinnes $=$

(a — c)

$$\frac{(a-c).n}{(a-b)} = \frac{(30-24).n}{18} = \frac{6.54}{18} = 18$$

Centner, weil $18 + 36 = 54$ Centner.

§. 36.

Eilfte Aufgabe. Eine gegebene Größe a dergestalt in drey Theile theilen, daß der erste Theil sich zum zweyten verhält, wie $m : n$ und der erste zum dritten, wie $m : p$.

Man nenne den ersten Theil $= x$, so ist der zweyte Theil die vierte Proportionalzahl zu m, n und x oder $m : n = x : \frac{nx}{m}$, welches der zweyte Theil ist; der dritte Theil ist die vierte Proportionalzahl zu m, p und x oder $m : p = x = \frac{px}{m}$ (§. 98. Arith.), welches der dritte Theil ist. Addirt man nun alle drey Theile, so hat man die gegebene Zahl; also

$$x + \frac{nx}{m} + \frac{px}{m} = a$$

$$mx + nx + px = ma$$

$$(m + n + p) . x = ma \text{ (§. 8)}$$

$$x = \frac{ma}{(m+n+p)} \text{ (§. 22).}$$

Der zweyte Theil ist $\frac{nx}{m} = \frac{ma}{(m + n + p)}$.

$\frac{n}{m} = \frac{nma}{(m + n + p) . m} = \frac{an}{(m+n+p)}$. Der

dritte

dritte Theil ist $= \frac{px}{m} = \frac{p}{m} \cdot \frac{ma}{(m+n+p)} =$
$\frac{apm}{m(m+n+p)} = \frac{ap}{(m+n+p)}$.

Man soll z. B. die Zahl $3749 = a$ in drey Theile theilen, so daß sich der erste zum zweyten $= 3:7 = m:n$ und der erste zum dritten $3:13 = m:p$ verhält, so ist der erste Theil $= \frac{am}{m+n+p} = \frac{3749 \cdot 3}{3+7+13} = \frac{11247}{23} = 489$. Der zweyte Theil $= \frac{an}{m+n+p} = \frac{3749 \cdot 7}{3+7+13} = \frac{26243}{23} = 1141$. Der dritte Theil $= \frac{ap}{m+n+p} = \frac{3749 \cdot 13}{3+7+13} = \frac{48737}{23} = 2119$. Die Probe ist, daß $489 + 1141 + 2119 = 3749$ und $489 : 1141 = 3:7$ und $489 : 2119 = 3:13$ ist.

§. 37.

Zwölfte Aufgabe. Zwey Körper A und B bewegen sich: A dergestalt, daß er in einer Zeit $= n$ den Raum m, B aber in der Zeit $= q$ den Raum p zurücklegt. Beyde Körper gehen von Einem Orte aus und bewegen sich nach gleicher Richtung, aber der Körper A bewegt sich in der Zeit $= h$, ehe B anfing sich zu bewegen; man fragt, wie lange Zeit $= x$ der Körper B anwen-

anwenden werde, um den Körper A zu erreichen.

Es ist klar, daß die Zeit, während welcher A sich bewegt, $= h + x$ ist. Da nun die Räume sich wie die Zeiten verhalten, so kann man durch die Regula Detri den Weg finden, den der Körper B durchläuft; nämlich wie sich die Zeit q zum Raum p verhält, so verhält sich die Zeit x zu dem von B zurückgelegten Raum oder $q : p = x : \frac{px}{q}$ (§. 98. Arith.), Gleichfalls sucht man den von A zurückgelegten Weg: nämlich in der Zeit n durchläuft A den Weg m, welchen Weg legt er in der Zeit $h + x$ zurück oder $n : m = h + x : \frac{hm + mx}{n}$. Da aber beyde Körper sich erreichen sollen, so sind die von ihnen zurückgelegten Wege gleich; also

$$\frac{px}{q} = \frac{hm + mx}{n}$$

$$\frac{npx}{q} = hm + mx \quad (\S.\ 23.)$$

$$npx = hmq + mqx$$

$$npx - mqx = hmq \quad (\S.\ 21.)$$

$$x = \frac{hmq}{np - mq} \quad (\S.\ 22.)$$

Z. B.

Z. B. ein Schiff A segelt 2 Meilen in der Stunde, also $n = 1$, $m = 2$ und nachdem es 9 Stunden $= h$ gesegelt hat, sendet man demselben ein anderes Schiff B nach, welches 3 Meilen in der Stunde segelt, für welches also $q = 1$ und $p = 3$ ist. Man fragt, wie viele Stunden B segeln werde, ehe es A einholt. Es ist also $x = \frac{hmq}{np - mq} = \frac{9 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 1 - 2 \cdot 1} = \frac{18}{1} =$ 18 Stunden.

§. 38.

Will man den Weg wissen, den der Körper B in der gefundenen Zeit $= x$ zurückgelegt hat, so findet man dies leicht durch folgende Proportion: in der Zeit q durchläuft der Körper B den Weg p, welchen Weg legt er in der Zeit $= x$ zurück?

$$q : p = x : \text{vierte Proportionalzahl}$$

$$q : p = \frac{hmq}{np - mq} : \frac{hmpq}{npq - mq^2}$$

und wenn man Zähler und Nenner durch q dividirt, so ist der von B in der Zeit x zurückgelegte Weg $= \frac{hmp}{np - mq}$. Im vorigen Beyspiel, wo $n = 1$, $m = 2$, $q = 1$, $p = 3$, $h = 9$ war, hat das Schiff B, ehe es A erreichte, einen Weg $= \frac{hmp}{np - mq} = \frac{9 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 1 - 2 \cdot 1} = \frac{54}{1} = 54$ Meilen gesegelt.

§. 39.

Dreyzehnte Aufgabe. Wir wollen annehmen, daß die Körper nicht von einem und demselben Orte ausgehen, sondern A von einem Orte ausgehet, der dem Ziele um einen Abstand oder eine Länge = a näher liegt; A bewege sich in einer Zeit = h, bevor B seine Bewegung anfängt; A bewege sich in einer Zeit = n durch den Raum m und B in der Zeit q durch den Raum p; man sucht die Zeit x, innerhalb welcher B A erreicht.

Aus dem, was bey der Auflösung der zwölften Aufgabe bewiesen ist, ist klar, daß der Raum, welchen B in der Zeit x durchläuft, $= \frac{px}{q}$ und der vom Körper A in der Zeit h + x zurückgelegte Raum $= \frac{hm + mx}{n}$ (§. 37.) ist; weil aber A dem Körper B um einen Weg = a voraus ist, so muß zu A's Weg noch a addirt werden, wenn die zurückgelegten Wege beyder gleich seyn sollen. Also:

$$\frac{px}{q} = a + \frac{hm + mx}{n}$$

$$\frac{npx}{q} = an + hm + mx \text{ (multipl. mit n)}$$

$$npx = anq + hmq + mqx \text{ (multipl. mit x)}$$

$$npx - mqx = anq + hmq$$

$$(np - mq).x = anq + hmq$$

$$x = \frac{anq + hmq}{np - mq}$$

Z. B.

Z. B. Von einem Orte geht ein Eilbothe A ab, welcher in 2 Stunden = n drey Meilen = m reiset; 10 Stunden = h, nachdem dieser abgesandt ist, wird von einem andern Orte, der 20 Meilen = a südlicher liegt, ein zweyter Eilbothe B abgesandt, welcher in 2 Stunden = q vier Meilen = p reiset; beyde reisen nach Süden. Man fragt, wie viele Stunden B reisen wird, ehe er A einhohlt. Es ist also:

$$x = \frac{anq + hmq}{np - mq} = \frac{20.2.2 + 10.3.2}{2.4 - 3.2} = \frac{80 + 60}{8 - 6}$$

$$= \frac{140}{2} = 70 \text{ Stunden.}$$

§. 40.

Man kann nun die Länge des Weges finden, den jeder Körper durchläuft; nämlich B läuft in q Stunden p Meilen, was läuft er in x Stunden?

$$q : p = x : \text{B's Weg}$$

$$q : p = \frac{anq + hmq}{np - mq} : \text{B's Weg (§. 39.)}$$

$$\text{also B's Weg} = \frac{anq + hmq}{np - mq} \cdot \frac{p}{q} = \frac{anpq + hmpq}{npq - mqq}$$

$$= \frac{anp + hmp}{np - mq}.$$

$$\text{Im vorigen Beyspiel ist B's Weg} = \frac{20.2.4 + 10.3.4}{2.4 - 3.2}$$

$$= \frac{160 + 120}{8 - 6} = \frac{280}{2} = 140 \text{ Meilen.}$$

Es ist klar, daß man A's Weg erhält, wenn man von B's Weg das Stück subtrahirt, was A vor B vor-

aus ist, oder a; also A's Weg = B's Weg — a = $\frac{anp + hmp}{np - mq} - a = \frac{anp + hmp - anp + amq}{np - mq}$ (wenn man mit $np - mq$ multipl.) $= \frac{hmp + amq}{np - mq}$ (weil $+ anp$ und $- anp$ sich aufheben).

Im vorigen Beyspiel ist A's Weg $= \frac{20.3.2 + 10.3.4}{2.4 - 3.2}$ $= \frac{120 + 120}{2} = \frac{240}{2} = 120$ Meilen.

Die letzten Formeln lehren, wie man die Wege finden kann, welche die Körper A und B durchlaufen müssen, um sich zu erreichen, ohne daß man die Zeit weiß.

Drittes Kapitel.

Einfache Gleichungen mit mehrern unbekannten Größen.

---

§. 41.

In den bis jetzt aufgelöseten Aufgaben war nur Eine unbekannte Größe oder wenn deren mehrere waren, so hingen sie dennoch von Einer unbekannten Größe ab und wurden durch sie bestimmt (§. 28.); wenn aber die Natur und Bedingungen der Aufgabe es mit sich bringen, daß mehrere unbekannte Größen in derselben vorkommen, welche ganz unabhängig von einander sind,

so

so muß man für jede unbekannte Größe eine besondere Grundgleichung haben und es muß jetzt erklärt werden, **wie man Gleichungen mit mehrern unbekannten Größen auflösen muß**, d. h. wie man den Werth der unbekannten Größen in gegebenen und bekannten Größen findet. Dazu hat man drey Methoden: 1) die **Substitutions-Methode**, 2) die **Combinations-Methode** und 3) die **Additions- und Subtractions-Methode.**

§. 42.

Man soll durch die **Substitutions-Methode** Gleichungen mit mehrern unbekannten Größen auflösen, wenn eben so viele Gleichungen als unbekannte Größen vorhanden sind.

Wir wollen annehmen, es wären vier Gleichungen A, B, C und D und in diesen vier unbekannte Größen x, y, z, u. Man sucht nun den Werth von x in der ersten Gleichung A und setzt oder substituirt man diesen Werth in die Gleichungen B, C, D, so **wird dadurch** x **aus diesen weggeschafft** und die dadurch entstandenen Gleichungen sind E, F, G. Nun sucht man den Werth von y in der Gleichung E, in welche B durch die erwähnte Substitution verwandelt worden ist, und setzt den gefundenen Werth von y in die Gleichungen F und G, in welche man C und D verwandelt hat. **So wird** y **weggeschafft** und es entstehen

 zwey

zwey neue Gleichungen H und I. Man sucht den Werth von z in der Gleichung H und setzt denselben in die Gleichung I, wodurch z weggeschafft wird. Die dadurch entstandene Gleichung K enthält nur die einzige unbekannte Größe u, welche nach den vorhin gegebenen Regeln (§. 21-24.) gefunden werden kann.

Erstes Beyspiel:

Es sind zwey Grundgleichungen (A) $2x + 3y = 35$ und (B) $3x + 4y = 48$ gegeben. Man findet nun in der Gleichung A einen Werth für x, welchen man in die Gleichung B setzt und dadurch x wegschafft, so daß in B nur Eine unbekannte Größe bleibt.

A . . . . $2x + 3y = 35$

$$2x = 35 - 3y$$

$$x = \frac{35 - 3y}{2}$$

$$3x = \frac{105 - 9y}{2}$$

B . . . . $3x + 4y = 48$

$$\frac{105 - 9y}{2} + 4y = 48$$

$$105 - 9y + 8y = 96$$

$$105 - y = 96$$

$$105 = 96 + y$$

$$105 - 96 = y$$

$$9 = y$$

Diesen

Diesen Werth von y setzt man in eine der Grundgleichungen, z. B. in (A) $2x + 3y = 35$, so ist $2x + 27 = 35$, $2x = 35 - 27$ und $8 = 2x$ oder $4 = x$. Daß dies die wahren Werthe sind, ersieht man daraus, daß $2 \cdot 4 + 3 \cdot 9 = 8 + 27 = 35$, so wie die Gleichung A es verlangt und $3 \cdot 4 + 36 = 12 + 36 = 48$ ist, wie die Gleichung B es erfoderte.

Zweytes Beyspiel:

Es sind drey Grundgleichungen gegeben:

A . . . $x + y = 10$
B . . . $x + z = 22$
C . . . $z + y = 28$

Man suche den Werth von x in der Gleichung A, nämlich $x = 10 - y$. Diesen setze man in die Gleichung B, so hat man x weggeschafft und die Gleichungen sind nun folgende:

D . . $10 - y + z = 22$
E . . $z + y = 28$

In der Gleichung D, in welche B verwandelt ist, suche man den Werth von y, nämlich $10 + z = 22 + y$ und $10 - 22 + z = y$. Diesen Werth von y substituire man in die Gleichung E, welche dadurch in die Gleichung F verwandelt wird.

$$F \;..\; 10 - 22 + z + z = 28$$
$$10 - 22 + 2z = 28$$
$$2z = 28 - 10 + 22$$
$$2z = 50 - 10$$
$$z = \tfrac{40}{2} = 20.$$

 Man

Man setze in die Gleichung C oder $y + z = 28$ den Werth von $z = 20$, so ist $y + 20 = 28$, also $y = 28 - 20 = 8$; in die Gleichung B oder $x + z = 22$ setze man gleichfalls den Werth von $z = 20$, so hat man $x + 20 = 22$, also $x = 22 - 20 = 2$.

Drittes Beyspiel:

Drey Grundgleichungen sind gegeben:

A . . . . $x + y + z = 36$

B . . . . $x + 3y - 2z = 48$

C . . . . $x - y + 3z = 20$

So ist in A $x = 36 - y - z$. Diesen Werth setze man in B und C, so erhält man folgende Gleichungen D und E:

$36 - y - z + 3y - 2z = 48$

D . . $36 + 2y - 3z = 48$

$36 - y - z - y + 3z = 20$

E . . $36 - 2y + 2z = 20$.

Aus der Gleichung D findet man den Werth von $2y = 48 - 36 + 3z = 12 + 3z$ und setzt man diesen Werth in die Gleichung E, so bekommt man

F . . $36 - 12 - 3z + 2z = 20$

$24 - z = 20$

$24 - 20 = 4 = z$.

Aus der Gleichung $2y = 12 + 3z$ findet man $2y = 12 + 12 = 24$, also $y = 12$ und aus der ersten Gleichung A oder $x + y + z = 36$ findet man

$x + 12 + 4 = 36$ und $x = 36 - 12 - 4 = 36 - 16 = 20$.

§. 43.

Die Combinations- oder Vereinigungs- oder Zusammensetzungs-Methode läßt sich auf folgende Regeln hinbringen:

1) Wenn drey Gleichungen A, B, C und drey unbekannte Größen da sind, so suche man in allen dreyen eine Gleichung für x, welche also noch y und z enthält. Diese Gleichungen mögen D, E und F heißen.

2) Da nun $D = E$ ist, so suche man daraus einen Werth für y oder eine Gleichung G, in der nur Eine unbekannte Größe z ist.

3) Man setze nun $E = F$ und suche daraus einen andern Werth für y oder eine Gleichung H, in welcher ebenfalls nur Eine unbekannte Größe z ist.

4) Man setze G und H gleich und finde daraus den endlichen Werth von z in bekannten Größen.

Beyspiel:

Die Grundgleichungen sind:

$$A \;.\;.\; x + y + z = 36$$
$$B \;.\;.\; x + 3y - 2z = 48$$
$$C \;.\;.\; x - y + 3z = 20.$$

Wenn man diese Gleichungen alle $= x$ macht, so erhält man:

$$D \;.\;.\; x = 36 - y - z$$
$$E \;.\;.\; x = 48 - 3y + 2z$$
$$F \;.\;.\; x = 20 + y - 3z.$$

Man setze nun D = E:

$$D = E \;.\; 36 - y - z = 48 - 3y + 2z$$
$$3y - y = 48 - 36 + 2z + z$$
$$2y = 12 + 3z$$
$$G \;.\; y = \frac{12 + 3z}{2}$$

Man setze ferner E = F:

$$E = F \;.\; 20 + y - 3z = 48 - 3y + 2z$$
$$y + 3y = 48 - 20 + 2z + 3z$$
$$4y = 28 + 5z$$
$$H \;.\;.\; y = \frac{28 + 5z}{4}$$

Man setze G = H:

$$G = H \;.\; \frac{12 + 3z}{2} = \frac{28 + 5z}{4}$$
$$48 + 12z = 56 + 10z$$
$$12z - 10z = 56 - 48$$
$$2z = 8$$
$$z = 4$$

So hat man also z gefunden; setzt man den Werth von z in die Gleichung G oder H, so findet man y = 12 und wenn man die Werthe von z und y in die Gleichung D, E oder F setzt, so findet man x = 20.

§. 44

§. 44.

Die Additions- und Subtractions-Methode besteht darin, daß man durch Addirung oder Subtrahirung das Unbekannte wegschafft, so daß man zuletzt nur Eine unbekannte Größe behält. Sie läßt sich auf folgende Regeln bringen:

1) Wenn zwey Gleichungen und zwey unbekannte Größen da sind, so multiplicirt man jede Gleichung mit dem Coefficienten der unbekannten Größe, welche man wegschaffen will, und wenn diese keinen Coefficienten hat, so ist 1 als solcher anzusehen.

2) Sind mehr als zwey Gleichungen da, so multiplicirt man jede Gleichung mit dem Product der Coefficienten der unbekannten Größe in den andern Gleichungen, welche weggeschafft werden soll.

3) Wenn nun in diesen dergestalt entstandenen Gleichungen die wegzuschaffende Größe einerley Zeichen hat, so subtrahire man die Gleichungen, hat sie aber verschiedene Zeichen, so addire man sie, wodurch man eine unbekannte Größe wegschafft und leicht die Gleichung, die nun nur Eine unbekannte Größe mehr enthält, auflösen kann.

4) Sind mehrere unbekannte Größen da, so fahre man in Anwendung dieser Methode fort.

Fol-

Folgende Beyspiele werden dies Verfahren näher aufklären und zugleich eine allgemeine Formel zur Auflösung von Gleichungen mit zwey unbekannten Größen geben. Allgemeine Formeln für mehrere unbekannte Größen findet man in C. Maclaurin's treatise of Algebra, London 1748. p. 82-85.

Erstes Beyspiel.

Es sind zwey Gleichungen und zwey unbekannte Größen da.

1	$ax + by = c$
2	$dx + ey = f$
$1 . e = 3$	$aex + bey = ce$
$2 . b = 4$	$bdx + bey = bf$
$3 - 4 = 5$	$aex - bdx = ce - bf$
$5 : (ae - bd) = 6$	$x = \frac{ce - bf}{ae - bd}$
$1 . d = 7$	$adx + bdy = cd$
$2 . a = 8$	$adx + aey = af$
$7 - 8 = 9$	$bdy - aey = cd - af$
$9 : (bd - ae) = 10$	$y = \frac{cd - af}{bd - ae}$

Es wird nöthig seyn, obige von den Engländern in ihren Elementar-Werken gebrauchte Bezeichnungsart zu erklären, bey der jede Behandlung deutlich wird, welche man mit den Gleichungen vornimmt, um zur Auflösung derselben zu gelangen. Man bezeichnet die

Glei-

Gleichungen mit Zahlen. Bey der dritten Gleichung steht $1 . e = 3$, welches bedeutet, daß die dritte Gleichung aus der Multiplication der ersten mit e entstanden ist; $2 . b = 4$ zeigt an, daß die vierte Gleichung aus der Multiplication der zweyten mit b entstanden ist; $3 - 4 = 5$ soll andeuten, daß man die vierte Gleichung von der dritten subtrahirt hat, um die fünfte zu erhalten; $5 : (ae - bd) = 6$ bedeutet, daß man die sechste Gleichung erhält, wenn man die fünfte durch $ae - bd$ dividirt. Sind die Gleichungen in Zahlen gegeben, wie im folgenden Beyspiel, so bedeutet $1 . 5 = 3$, daß die erste Gleichung mit 5 multiplicirt werden soll, um die dritte zu erhalten.

Zwey Gleichungen in Zahlen.

1	$6x - 4y = 40$
2	$5x + 2y = 60$
$1 . 5 = 3$	$30x - 20y = 200$
$2 . 6 = 4$	$30x + 12y = 360$
$4 - 3 = 5$	$32y = 160$
$5 : 32 = 6$	$y = \frac{160}{32} = 5$
$1 . 2 = 7$	$12x - 8y = 80$
$2 . 4 = 8$	$20x + 8y = 240$
$7 + 8 = 9$	$32x = 320$
$9 : 32 = 10$	$x = \frac{320}{32} = 10$

Beym Gebrauch der allgemeinen Formel, wo $a = 6$, $b = 4$, $c = 40$, $d = 5$, $e = 2$, $f = 60$ ist,

hat man $x = \frac{ce - bf}{ae - bd} = \frac{80 + 240}{12 + 20} = \frac{320}{32} = 10$

und $y = \frac{cd - af}{db - ae} = \frac{200 - 360}{-20 - 12} = \frac{-160}{-32} = 5.$

Zweytes Beyspiel.

Es sind drey Gleichungen und drey unbekannte Größen.

1	$2x + 3y + 4z = 18$
2	$3x + 5y + 2z = 24$
3	$4x + 7y + 8z = 38$
1.(2.8) = 4	$32x + 48y + 64z = 288$
2.(4.8) = 5	$96x + 160y + 64z = 768$
3.(2.4) = 6	$32x + 56y + 64z = 304$
5 − 4 = 7	$64x + 112y = 480$
5 − 6 = 8	$64x + 104y = 464$
7 − 8 = 9	$8y = 16$
9 : 8 = 10	$y = \frac{16}{8} = 2$
1.(5.7) = 11	$70x + 105y + 140z = 630$
2.(3.7) = 12	$63x + 105y + 42z = 504$
3.(3.5) = 13	$60x + 105y + 120z = 570$
11 − 12 = 14	$7x + 98z = 126$
13 − 12 = 15	$-3x + 78z = 66$
14. − 3 = 16	$-21x - 294z = 378$
-15. 7 = 17	$-21x + 546z = 462$
17 − 16 = 18	$840z = 840$
18 : 840 = 19	$z = 1$

Will

Will man auf eben dem Wege x finden, so kann man mit der Gleichung 14 und 15 anfangen:

	20	$7x + 98z = 126$
	21	$-3x + 78z = 66$
20 . 78 =	22	$546x + 7644z = 9828$
21 . 98 =	23	$-294x + 7644z = 6468$
22 — 23 =	24	$840x = 3360$
24 . 840 =	25	$x = \frac{3360}{840} = 4$

Anmerk. Es ist schwer zu bestimmen, in welchen Fällen diese oder jene der drey Methoden (§. 42. 43. 44.) mit dem größten Vortheil sich anwenden läßt. Die Additions- und Subtractions-Methode ist die kürzeste, wenn nur zwey unbekannte Größen mit Zahl- oder Buchstaben-Coefficienten vorkommen; sind aber mehrere unbekannte Größen vorhanden, so ist die Substitutions- und Combinations-Methode kürzer.

§. 45.

Erste Aufgabe. Ein Pächter verkauft zu zwey Malen Getraide: zuerst 30 Tonnen Gerste und 40 Tonnen Haber und erhält dafür 120 Rthlr.; dann verkauft er 50 Tonnen Gerste und 20 Tonnen Haber zu demselben Preise wie vorhin und erhält dafür 130 Rthlr. Man fragt, was er für die Tonne Gerste und für die Tonne Haber erhalten hat.

Man

Man nenne den gesuchten Preis für die Tonne Gerste $= x$ und für die Tonne Haber $= y$, so ist nach den Bedingungen der Aufgabe $30x + 40y = 120$ und $50x + 20y = 130$. Diese Gleichungen wollen wir nach der Additions- und Subtractions-Methode auflösen.

1	$30x + 40y = 120$
2	$50x + 20y = 130$
1 . 20 = 3	$600x + 800y = 2400$
2 . 40 = 4	$2000x + 800y = 5200$
4 − 3 = 5	$1400x = 2800$
5 : 1400 = 6	$x = \frac{2800}{1400} = 2$
1 . 50 = 7	$1500x + 2000y = 6000$
2 . 30 = 8	$1500x + 600y = 3900$
7 − 8 = 9	$1400y = 2100$
10	$y = \frac{2100}{1400} = 1\frac{1}{2}$.

Man hat also gefunden, daß die Tonne Gerste zu 2 Rthl. und die Tonne Haber zu $1\frac{1}{2}$ Rthl. verkauft worden ist.

§. 46.

Zweyte Aufgabe. Jemand wollte Geld an mehrere Arme geben, und fand, daß wenn er jedem 5 ß gäbe, er 10 ß zu wenig hätte und wenn er jedem 4 ß gäbe, er 5 ß übrig hätte. Man fragt, wie viel Geld er hatte und wie groß die Zahl der Armen war?

Man

Man nenne die Anzahl der Armen $= x$ und die Menge des Geldes $= y$. Erhält nur jeder 5 ß, so ist die ganze Ausgabe $= 5x$; aber das gibt 10 ß mehr als er hat, oder $5x = y + 10$ und $5x - y = 10$. Gibt er aber jedem nur 4 ß, und in allen $4x$, so gibt er 5 ß weniger aus als er hat, oder $4x = y - 5$ und $4x - y = -5$.

1	$5x - y = 10$
2	$4x - y = -5$
$1 - 2 = 3$	$x = 15$
$1 . 4 = 4$	$20x - 4y = 40$
$2 . 5 = 5$	$20x - 5y = -25$
$5 - 4 = 6$	$y = 65$

§. 47.

Dritte Aufgabe. Es ist die Summe zweyer Größen $= a$ und ihre Differenz $= b$ gegeben; man soll die Größen selbst finden.

Die größere der unbekannten Größen sey $= x$ und die kleinere $= y$, so ist vermöge der Bedingung:

1	$x + y = a$
2	$x - y = b$
$1 + 2 = 3$	$2x - = a + b$
$3 : 2 = 4$	$x = \frac{a + b}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$
$1 - 2 = 5$	$2y = a - b$
$5 : 2 = 6$	$y = \frac{a - b}{2} = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$

Beyspiel. $a = 215$, $b = 117$, so ist $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = \frac{215}{2} + \frac{117}{2} = \frac{332}{2} = 166$ und $y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = \frac{215}{2} - \frac{117}{2} = \frac{98}{2} = 49$.

§. 48.

Vierte Aufgabe. Bey einer Arbeit arbeiten A und B zusammen 6 Tage und verdienen 480 ß; A und C arbeiten 9 Tage und verdienen 648 ß; B und C arbeiten 15 Tage und verdienen 960 ß; wie viel hat jeder dieser Arbeiter täglich verdient?

Der tägliche Verdienst von A sey $= x$, von B $= y$ und von C $= z$, so ist nach den Bedingungen der Aufgabe

$$6x + 6y = 480$$
$$9x + 9z = 648$$
$$15y + 15z = 960.$$

Diese Gleichungen wollen wir nach der Combinations-Methode auflösen, also:

$$6x = 480 - 6y$$
$$x = \frac{480 - 6y}{6} = 80 - y$$
$$9x = 648 - 9z$$
$$x = \frac{648 - 9z}{9} = 72 - z;$$

also $80 - y = 72 - z$

$$80 - 72 = y - z$$
$$8 + z = y.$$

Ferner

Ferner $15y + 15z = 960$

$$15y = 960 - 15z$$

$$y = \frac{960 - 15z}{15} = 64 - z;$$

also $8 + z = 64 - z$

$$8 + 2z = 64$$

$$2z = 64 - 8 = 56$$

$$z = 28.$$

Nun ist $8 + z = y = 8 + 28 = 36$. Ferner $x = 72 - z = 72 - 28 = 44$; also hat A 44 ß, B 36 ß und C 28 ß täglich verdient.

§. 49.

Fünfte Aufgabe. Man soll drey Zahlen x, y, z von der Beschaffenheit finden, daß die Hälfte der ersten nebst dem dritten Theil der zweyten und dem vierten Theil der dritten einer gegebenen Größe a und der dritte Theil der ersten nebst dem vierten Theil der zweyten und dem fünften Theil der dritten einer gegebenen Größe b und endlich der vierte Theil der ersten nebst dem fünften Theil der zweyten und dem sechsten Theil der dritten einer gegebenen Größe c gleich ist.

Nach den Bedingungen der Aufgabe bekommt man folgende Gleichungen:

A, $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z = a$

B, $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{5}z = b$

C, $\frac{1}{4}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{6}z = c$

Diese Brüche bringe man auf gleiche Benennung (§. 38. Arith.) und schaffe den Nenner oder Divisor durch die Multiplication weg (§. 23.), so hat man

$$D,\quad 6x + 4y + 3z = 12a$$

$$E,\quad 20x + 15y + 12z = 60b$$

$$F,\quad 15x + 12y + 10z = 60c.$$

Diese Gleichungen kann man nach der Combinations-Methode auflösen und sie zuerst alle = y und dann = z machen, um endlich x zu finden (§. 43.).

$$4y = 12a - 6x - 3z$$

$$G,\quad y = \frac{12a - 6x - 3z}{4}$$

$$15y = 60b - 20x - 12z$$

$$H,\quad y = \frac{60b - 20x - 12z}{15}$$

$$12y = 60c - 15x - 10z$$

$$I,\quad y = \frac{60c - 15x - 10z}{12}$$

$$G = H,\quad \frac{12a - 6x - 3z}{4} = \frac{60b - 20x - 12z}{15}$$

$$180a - 90x - 45z = 240b - 80x - 48z$$

$$48z - 45z = 3z = -180a + 240b + 10x$$

$$K,\quad z = -60a + 80b + \frac{10x}{3}$$

$$G = I,\quad \frac{12a - 6x - 3z}{4} = \frac{60c - 15x - 10z}{12}$$

$$144a - 72x - 36z = 240c - 60x - 40z$$

$$40z - 36z = 4z = -144a + 240c + 12x$$

$$L,\quad z = -36a + 60c + 3x$$

$$K = L,\ -60a + 80b + \frac{10x}{3} = -36a + 60c + 3x$$

$$\frac{10x}{3} - 3x = 24a - 80b + 60c$$

$$\frac{10x - 9x}{3} = \frac{x}{3} = 24a - 80b + 60c$$

$$x = 72a - 240b + 180c.$$

Setzt man nun den Werth von x in die Gleichung L, so findet man $z = -36a + 60c + 3(72a - 240b + 180c) = -36a + 60c + 216a - 720b + 540c = 180a - 720b + 600c$. Den Werth von y findet man, wenn man den Werth von x und z in die Gleichung G setzt; nämlich $y = \frac{12a - 6x - 3z}{4} = 3a - 6\left(\frac{72a - 240b + 180c}{4}\right) - 3\left(\frac{180a - 720b + 600c}{4}\right) = 3a - 6(18a - 60b + 45c) - 3(45a - 180b + 150c) = 3a - 108a + 360b - 270c - 135a + 540b - 450c = -240a + 900b - 720c$.

Beyspiel. $a = 62$, $b = 47$, $c = 38$, so ist $x = 72a - 240b + 180c = 72 . 62 - 240 . 47 + 180 . 38 = 4464 - 11280 + 6840 = 24$. Ferner $y = -240a + 900b - 720c = -240 . 62 + 900 . 47 - 720 . 38 = -14880 + 42300 - 27360 = 60$ und endlich $z = 180a - 720b + 600c = 180 . 62 - 720 . 47 + 600 . 38 = 11160 - 33840 + 22800 = 120$.

§. 50.

Sechste Aufgabe. Man soll eine gegebene Größe a in drey Theile x, y, z von der Beschaffenheit theilen, daß das Doppelte der ersten nebst b, d. h. $2x + b$, das Dreyfache der zweyten nebst c, d. h. $3y + c$, und das Vierfache der dritten nebst d, d. h. $4z + d$, gleich sind.

Nach den Bedingungen der Aufgabe entstehen folgende Gleichungen, welche durch die Substitutions-Methode aufgelöset werden können (§. 42.):

$$A,\quad x + y + z = a$$
$$B,\quad 2x + b = 3y + c$$
$$C,\quad 2x + b = 4z + d.$$

Aus der ersten Gleichung A findet man einen Werth für $x = a - y - z$ und also $2x = 2a - 2y - 2z$. Diesen Werth setze man in die Gleichungen B und C, so ist

$$D,\quad 2a - 2y - 2z + b = 3y + c$$
$$E,\quad 2a - 2y - 2z + b = 4z + d$$

Aus der Gleichung D suche man einen Werth für y:

$$2a - 2z + b - c = 5y$$
$$F,\quad \frac{2a - 2z + b - c}{5} = y$$

Aus der Gleichung E suche man einen andern Werth für y:

$$2a - 6z + b - d = 2y$$
$$G,\quad \frac{2a - 6z + b - d}{2} = y$$

Die

Die Gleichungen F und G setze man nun gleich, so findet man den Werth von z:

$$\frac{2a - 2z + b - c}{5} = \frac{2a - 6z + b - d}{2}$$

$$4a - 4z + 2b - 2c = 10a - 30z + 5b - 5d$$

$$30z - 4z = 26z = 6a + 3b + 2c - 5d$$

$$\text{H,} \quad z = \frac{6a + 3b + 2c - 5d}{26}$$

Wenn man in die Gleichung bey G $2a - 6z + b - d = 2y$ den Werth von z bringt, so findet man y:

$$2a - 6\left(\frac{6a + 3b + 2c - 5d}{26}\right) + b - d = 2y$$

$$\frac{52a - 36a - 18b - 12c + 30d + 26b - 26d}{26} = 2y$$

$$\frac{16a + 8b - 12c + 4d}{26} = 2y$$

$$\frac{16a + 8b - 12c + 4d}{52} = y$$

$$\frac{8a + 4b - 6c + 2d}{26} = y.$$

Setzt man endlich diese gefundenen Werthe für y und z in die Gleichung $x = a - y - z$, welche eine Folge der Gleichung A ist, so findet man x:

$$x = a - \frac{8a - 4b + 6c - 2d - 6a - 3b - 2c + 5d}{26}$$

$$x = \frac{26a - 8a - 4b + 6c - 2d - 6a - 3b - 2c + 5d}{26}$$

$$x = \frac{12a - 7b + 4c + 3d}{26}$$

Z. B. Man soll die Zahl $90 = a$ dergestalt theilen, daß $x + y + z = 90$, $2x + 40 = 3y + 20$ und $2x + 40 = 4z + 10$, also $b = 40$, $c = 20$, $d = 10$ ist; also: $x = \frac{12 \cdot 90 - 7 \cdot 40 + 4 \cdot 20 + 3 \cdot 10}{26} = \frac{1080 - 280 + 80 + 30}{26} = \frac{1190 - 280}{26} = \frac{910}{26} = 35$; $y = \frac{8 \cdot 90 + 4 \cdot 40 - 6 \cdot 20 + 2 \cdot 10}{26} = \frac{720 + 160 - 120 + 20}{26} = \frac{900 - 120}{26} = \frac{780}{26} = 30$; $z = \frac{6 \cdot 90 + 3 \cdot 40 + 2 \cdot 20 - 5 \cdot 10}{26} = \frac{540 + 120 + 40 - 50}{26} = \frac{700 - 50}{26} = \frac{650}{26} = 25$.

§. 51.

Siebente Aufgabe. Man soll drey Zahlen x, y, z von der Beschaffenheit finden, daß die erste nebst der Hälfte der zweyten und dritten; die zweyte nebst dem dritten Theil der ersten und dritten und die dritte nebst dem vierten Theil der ersten und zweyten jede für sich einer gegebenen Größe a gleich ist.

Nach den Bedingungen der Aufgabe ist

$x + \frac{y + z}{2} = a$; also $2x + y + z = 2a$

$y + \frac{x + z}{3} = a$; also $3y + x + z = 3a$

$z + \frac{x + y}{4} = a$; also $4z + x + y = 4a$

Diese

Diese Gleichungen ordne man nach den Buchstaben, damit sie sich desto leichter nach der Additions- und Subtractions-Methode auflösen lassen (§. 44.).

1	$2x + y + z = 2a$
2	$x + 3y + z = 3a$
3	$x + y + 4z = 4a$
1 . 1 = 4	$2x + y + z = 2a$
2 . 2 = 5	$2x + 6y + 2z = 6a$
3 . 2 = 6	$2x + 2y + 8z = 8a$
5 − 4 = 7	$5y + z = 4a$
6 − 5 = 8	$-4y + 6z = 2a$
7 . 4 = 9	$20y + 4z = 16a$
8 . 5 = 10	$-20y + 30z = 10a$
9 + 10 = 11	$34z = 26a$
	$z = \frac{26a}{34} = \frac{13a}{17}$

Bringt man nun diesen Werth von z in die Gleichung 7 oder $5y + z = 4a$, so findet man $5y + \frac{13a}{17} = 4a = \frac{68a}{17}$, also $5y = \frac{68a - 13a}{17}$ und $y = \frac{55a}{17 \cdot 5} = \frac{11a}{17}$. Um x zu finden, kann man die Gleichung 2 oder $x + 3y + z = 3a$ gebrauchen; also $x + \frac{33a + 13a}{17} = x + \frac{46a}{17} = 3a = \frac{51a}{17}$ und $x = \frac{51a - 46a}{17} = \frac{5a}{17}$. Es sey z. B.

$a = 51$, so ist $\frac{1}{17}$ davon $= 3$, also $x = \frac{5a}{17} = 5 \cdot 3 = 15$; $y = \frac{11a}{17} = 33$ und $z = \frac{13a}{17} = 39$.

§. 52.

Achte Aufgabe. Eine gewisse Anzahl Ochsen $= a$ verzehren das Gras einer Wiese $= b$ in einer Zeit $= c$; eine andere Anzahl Ochsen $= d$ verzehren das Gras einer andern Wiese $= e$ in der Zeit $= f$; man fragt, wie viele Ochsen $= y$ eine gleich gute Gräßung $= g$ in der Zeit $= h$ verzehren, unter der Bedingung, daß das Gras in Verhältniß der Zeit wächst.

Man setze die Aufgabe folgendergestalt auf:

Ochsen	Wochen	Gräsung in Tonnen Landes
a	c	b
d	f	e
y	h	g

1 | $y =$ gesuchte Anzahl Ochsen.

2 | $x =$ das Gras, welches anfangs auf jeder Tonne Land war.

3 | $z =$ das Gras, welches wöchentlich auf einer Tonne Land wächst.

4 | $1 =$ das Gras, welches ein Ochse in Einer Woche verzehrt.

Dieses findet man nach der Regula Detri.	5	bx, ex und $gx =$ das Gras auf den Wiesen b, e und g im Anfange.
	6	cbz, fez und $hgz =$ das Gras, welches in den Zeiten c, f und h auf den Wiesen b, e und g wächst.
	7	ac, df und $hy =$ das Gras, welches von den Ochsen a, d und y in der Zeiten c, f und h verzehrt wird.
Nach den Bedingungen der Aufgabe.	8	$ac = bx + cbz.$
	9	$df = ex + fez.$
	10	$hy = gx + hgz$
$8 . ef =$	11	$acef = befx + bcefz$
$9 . bc =$	12	$bcdf = bcex + bcfez$
$11 - 12 =$	13	$acef - bcdf = befx - bcex = (bef - bce) . x$
	14	$x = \frac{acef - bcdf}{bef - bce}$
$9 . g =$	15	$dfg = egx + efgz$
$10 . e =$	16	$ehy = egx + ehgz$
$16 - 15 =$	17	$ehy - dfg = ehgz - efgz = (ehg - efg) . z$
	18	$z = \frac{ehy - dfg}{ehg - efg}$.
$8 : b =$	19	$\frac{ac}{b} = x + cz$

Susti.

Sustituire 14 und 18 in 19 } = 20	$\frac{ac}{b} = \frac{acef - bcdf}{bef - bce} + \frac{cehy - cdfg}{egh - efg}$
Nimm nun 21	$f - c = p$, $h - f = r$ und $p + r = h - c$.
Sustituire in 20 = 22	$\frac{ac}{b} = \frac{acef - bcdf}{bep} + \frac{cehy - cdfg}{egr}$
22 . b = 23	$ac = \frac{acef - bcdf}{ep} + \frac{(cehy - cdfg).b}{egr}$
23 . egpr = 24	$acegpr = acefgr - bcdfgr + bcehpy - bcdfgp$
25	$bcehpy = acegpr - acefgr + bcdfgr + bcdfgp$
25 : c = 26	$behpy = aegpr - aefgr + bdfgr + bdfgp$
	$behpy = aegr\,(p - f) + bdfg\,(r + p)$
nach 21 . . .	$p - f = - c$ und $r + p = h - c$
27	$behpy = - acegr + bdfg\,(h - c)$
nach 21 . . .	$- r = f - h$ und $p = f - c$
28	$behpy = aceg\,(f - h) + bdfg\,(h - c)$
28 : behp = 29	$y = \frac{aceg\,(f - h) + bdfg\,(h - c)}{beh\,(f - c)}$

Beyspiel.	Ochsen	Wochen	Tonnen Land
	a = 20	c = 12	b = 15
	d = 30	f = 16	e = 24
	y	h = 8	g = 30

so

so ist $y = \frac{20 \cdot 12 \cdot 24 \cdot 30(16-8) + 15 \cdot 30 \cdot 16 \cdot 30(8-12)}{15 \cdot 24 \cdot 8 \cdot (16-12)}$

und wenn man Zähler und Nenner mit 15 multiplicirt,

so ist $y = \frac{20 \cdot 12 \cdot 24 \cdot 2 \cdot 8 + 30 \cdot 16 \cdot 30 \cdot -4}{24 \cdot 8 \cdot 4} =$

$\frac{92160 - 57600}{768} = \frac{34560}{768} = 45.$

Also können unter diesen Bedingungen auf 30 Tonnen Land in 8 Wochen 45 Ochsen gegraset werden.

§. 53.

Neunte Aufgabe. Sechs Personen sollen ein Erbtheil unter sich theilen: der ersten Erbtheil ist $= x$, der zweyten $= y$, der dritten $= z$, der vierten $= u$, der fünften $= t$ und der sechsten $= v$. Die Summe der fünf ersten Erbtheile macht eine gegebene Zahl $= a$ aus (d. h. $x + y + z + u + t = a$); die Summe des 1, 2, 3, 4 und 6ten Erbtheils ist $= b$ (d. h. $x + y + z + u + v = b$); die Summe des 1, 2, 3, 5 und 6ten Erbtheils ist $= c$ (d. h. $x + y + z + t + v = c$); die Summe des 1, 2, 4, 5 und 6ten Erbtheils ist $= d$ (d. h. $x + y + t + u + v = d$); die Summe des 1, 3, 4, 5 und 6ten Erbtheils ist $= e$ (d. h. $x + z + u + t + v = e$) und endlich die Summe des 2, 3, 4, 5 und 6ten Erbtheils $= f$ (d. h. $y + z + u + t + v = f$). Es wird gefragt, wie viel jeder zu seinem Erbtheil empfangen habe?

	1	$x + y + z + u + t = a$
	2	$x + y + z + u + v = b$
	3	$x + y + z + t + v = c$
	4	$x + y + u + t + v = d$
	5	$x + z + u + t + v = e$
	6	$y + z + u + t + v = f$
$1 - 2 =$	7	$t - v = a - b$
$1 - 3 =$	8	$u - v = a - c$
$1 - 4 =$	9	$z - v = a - d$
$1 - 5 =$	10	$y - v = a - e$
$1 - 6 =$	11	$x - v = a - f$
$7 + 8 + 9 + 10 + 11 =$	12	$x + y + z + u + t - 5v = 5a - b - c - d - e - f.$
Subst. a nach 1 =	13	$a - 5v = 5a - b - c - d - e - f$
	14	$a + b + c + d + e + f - 5a = 5v$
Abkürzung im Ausdruck	15	$a + b + c + d + e + f = S$
	16	$S - 5a = 5v$
$16 : 5 =$	17	$\frac{S - 5a}{5} = v = \frac{S}{5} - a.$

Um die übrigen unbekannten Größen zu finden, nehme man die Gleichungen, in welchen sie vorkommen, und substituire. Z. B. nach der Gleichung 7 ist $t - v = a - b$, also $t = a - b + v$; aber nach 17 ist $v = \frac{S}{5} - a$, also $t = a - b + \frac{S}{5} - a = \frac{S}{5} - b$. Auf eben die Art findet man die andern unbekannten Größen,

Größen, z. B. $u = \frac{S}{5} - c$, $z = \frac{S}{5} - d$, $y = \frac{S}{5} - e$ und $x = \frac{S}{5} - f$.

Z. B. Es sey $a = 870$ xE; $b = 780$; $c = 960$; $d = 930$; $e = 980$; $f = 880$, so ist $a + b + c + d + e + f = 870 + 780 + 960 + 930 + 980 + 880 = 5400$ und $\frac{S}{5} = 1080$. Also:

$$x = \frac{S}{5} - f = 1080 - 880 = 200$$
$$y = \frac{S}{5} - e = 1080 - 980 = 100$$
$$z = \frac{S}{5} - d = 1080 - 930 = 150$$
$$u = \frac{S}{5} - c = 1080 - 960 = 120$$
$$t = \frac{S}{5} - b = 1080 - 780 = 300$$
$$v = \frac{S}{5} - a = 1080 - 870 = 210$$

Viertes Kapitel.

Rechnung mit Potenzen, Exponenten und Wurzeln.

§. 54.

Wird eine Größe mehrere Male mit sich selbst multiplicirt, so heißt das daraus entstandene Product eine **Potenz oder Dignität der gegebenen Größe.** Jeden

Jeden dieser gleichen Factoren nennt man die **Wurzel** (radix) und die Anzahl der gleich großen Factoren, welche die Potenz ausmachen, **den Grad oder den Exponenten der Potenz.** So ist, wenn 2 die Wurzel ist, 2 . 2 = 4 die zweyte; 2 . 2 . 2 = 8 die dritte; 2 . 2 . 2 . 2 = 16 die vierte; 2 . 2 . 2 . 2 . 2 = 32 die fünfte; 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 = 64 die sechste Potenz u. s. w. von 2. Ist die algebraische Größe a die Wurzel, so ist die erste Potenz = a, die zweyte = aa; die dritte = a . a . a; die vierte = a . a . a . a; die fünfte = a . a . a . a . a, die sechste = a . a . a . a . a . a u. s. w. Um die zwanzigste Potenz von a zu bezeichnen, müßte man zwanzig, um die hundertste Potenz anzudeuten, hundert a neben einander setzen. Dies würde aber weitläuftig und beschwerlich seyn. Man schreibt daher bloß die Wurzel und setzt rechter Hand über dieselbe eine kleine Zahl oder den **Exponenten, welcher anzeigt, wie oft die Größe mit sich selbst multiplicirt ist;** nämlich $aa = a^2$, $aaa = a^3$, $aaaa = a^4$, $aaaaa = a^5$, $aaaaaa = a^6$ u. s. w. So bedeutet a^{20}, daß a zwanzigmal mit sich selbst multiplicirt ist und a^{30} ist die dreyßigste Potenz von a. Die Größe b mehrere Male z. B. n Mal mit sich selbst multiplicirt ist $= b^n$ und c^x bedeutet, daß die gegebene Größe c zu der unbekannten Potenz x erhoben oder so oft mit sich selbst multiplicirt werden soll.

§. 55.

Potenzen zu addiren und subtrahiren.

1) Haben die Potenzen einerley Wurzel und gleichen Exponenten, so sind die Größen von einerley Art und können nach den vorhin (§. 5. 6.) gegebenen Regeln addirt und subtrahirt werden. Z. B. $5a^3 + 4a^3 = 9a^3$ d. h. fünf Kubus von a und 4 Kubus von a machen zusammen 9 Kubus von a aus. Eben so ist $3c^4 + 2c^4 = 5c^4$.

Addition.

$$\begin{array}{r} a^2 + 3b^2 - 2c^4 + d^3 - 9e^6 \\ a^2 + 4b^2 + 5c^4 - 3d^3 - 2e^6 \\ \hline 2a^2 + 7b^2 + 3c^4 - 2d^3 - 11e^6. \end{array}$$

Subtraction.

$$\begin{array}{r} 2m^3 - 8n^2 + 5p^3 - 9q^3 \\ m^3 - 6n^2 + p^3 + 8q^3 \\ - \quad + \quad - \quad - \\ \hline m^3 - 2n^2 + 4p^3 - 17q^2. \end{array}$$

2) Sind aber entweder die Wurzeln verschieden und die Exponenten gleich oder die Exponenten verschieden und die Wurzeln gleich oder endlich beyde verschieden, so sind es Größen von verschiedener Art und die Addition und Subtraction läßt sich nur durch Zeichen andeuten. Z. B a^3 und b^3 sind addirt $= a^3 + b^3$; eben so von c^5 subtrahirt c^2 gibt zum Unterschiede $c^5 - c^2$ und endlich

lich wenn man m^4 und $-n^3$ addiren soll, so ist die Summe $= m^4 - n^3$.

Addition.

$$\begin{array}{l} x^4 + y^3 \\ x^2 - b^3 + a^2 \\ \hline x^4 + x^2 + y^3 - b^3 + a^2 \end{array}$$

Subtraction.

$$\begin{array}{l} a^3 - b^3 \\ a^2 - c^3 + d^2 \\ - \quad + \quad - \\ \hline a^3 - a^2 - b^3 + c^3 - d^2 \end{array}$$

§. 56.

Potenzen zu multipliciren.

1) Sind die Wurzeln dieselben, so addirt man nur die Exponenten und die Summe ist der Exponent des Products bey der gegebenen Wurzel; denn $a^3 . a^2 = aaa . aa = aaaaa$ (§. 8.) $= a^5 = a^{3+2}$ (§. 54.); eben so $x^4 . x^3 = xxxx . xxx = xxxxxxx = x^7 = x^{4+3}$; eben so $m^5 . m^2 = m^{5+2} = m^7$; eben so $x^n . x^n = x^{n+n} = x^{2n}$; eben so $x^n . x^m = x^{n+m}$ und $a^1 . a^5 = a^{1+5}$ und $\frac{a^2}{b^3} . \frac{a^4}{b^2} = \frac{a^6}{b^5}$.

2) Sind die Wurzeln nicht gleich, so kann man auch die Exponenten nicht addiren, sondern die Potenzen ohne ein Zeichen nur neben einander setzen (§. 8.). So geben a^3 und b^5 mit einander multiplicirt das Product $a^3 b^5$ und eben so x^n und y^m das Product $x^n y^m$.

$$\begin{array}{r} 2a^2 + 3b^3 \\ 2a^2 + 3b^3 \\ \hline 6a^2 b^3 + 9b^6 \\ 4a^4 + 6a^2b^3 \\ \hline 4a^4 + 12a^2b^3 + 9b^6. \end{array} \qquad \begin{array}{r} x^2 - y^3 + 4y^5 \\ -3y^2 \\ \hline -3y^2x^2 + 3y^5 - 12y^7 \end{array}$$

§. 57.

Potenzen zu dividiren.

1) Sind die Wurzeln dieselben, so subtrahirt man den Exponenten des Divisors vom Exponenten des Dividendus und der Unterschied ist der Exponent des Quotienten bey der gegebenen Wurzel. Z. B. $\frac{a^5}{a^2} = \frac{aaaaa}{aa}$ (§. 9.); dieser Bruch läßt sich abkürzen, wenn man Zähler und Nenner durch aa dividirt (§. 30. Arith.); also ist der Quotient $\frac{aaaaa}{aa} = a^3 = a^{5-2}$; eben so $\frac{x^4}{x^2} = \frac{xxxx}{xx} = x^2 = x^{4-2}$; eben so $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ und $\frac{x^{3n}}{x^{2n}} = x^{3n-2n} = x^n$ und $\frac{a^m b^n}{a^2 b^2} = a^{m-2} b^{n-2}$.

2) Sind die Wurzeln nicht gleich, so läßt sich die Division nur durch Zeichen andeuten. Z. B. a^5 dividirt durch $b^3 = \frac{a^5}{b^3}$ und y^m durch $z^n = \frac{y^m}{z^n}$.

3) Beobachtet man diese Regeln, so geschieht die Division zusammengesetzter Größen auf die vorhin (§. 9.) beschriebene Weise. Z. B.

$$2a^3 + 3b^5 \,)\, 4a^6 + 12a^3b^5 + 9b^{10} + 2a^3c^4 + 3b^5c^4 \,(\, 2a^3 + 3b^5 + c^4$$

$$\begin{array}{l} 4a^6 + 6a^3b^5 \\ \hline 6a^3b^5 + 9b^{10} \\ 6a^3b^5 + 9b^{10} \\ \hline 2a^3c^4 + 3b^5c^4 \\ 2a^3c^4 + 3b^5c^4 \\ \hline 0 \qquad 0 \end{array}$$

§. 58.

§. 58.

Die erste Potenz einer Größe a oder a^1 ist der Wurzel a gleich oder $a^1 = a$; denn da $a^3 = aaa$ und $a^2 = aa$ ist (§. 54.), so kann a^1 nichts anders als die Wurzel seyn. Ferner entsteht der Exponent 1, wenn man Zahlen subtrahirt, deren Unterschied $= 1$ ist, z. B. $5 - 4 = 1$; also kann man $a^1 = a^{5-4}$ ansehen; aber $a^{5-4} = \frac{a^5}{a^4}$ (§. 57.) $= \frac{aaaaa}{aaaa}$ (§. 54.) $= a$, also ist $a^1 = a$. Eben so ist $x^1 = x$, $ab = a^1 b^1$, $100 = 100^1$, woraus folgt, daß man nicht nöthig hat, den Exponenten 1 hinzuschreiben und daß jede Größe, welche keinen ausdrücklich genannten Exponenten hat, so angesehen werden könne, als sey 1 ihr Exponent.

§. 59.

Jede Potenz, deren Exponent Null ist, ist $= 1$ oder $a^0 = 1$. Null als Exponent kann entstehen, wenn man von einer Zahl eine andere eben so große subtrahirt, z. B. $3 - 3 = 0$; also ist $a^0 = a^{3-3} = \frac{a^3}{a^3}$ (§. 57.) $= 1$ (§. 25. Arith.); also $a^0 = 1$, eben so $x^0 = x^{2-2} = \frac{x^2}{x^2} = \frac{xx}{xx} = 1$.

Wird eine Größe, deren Exponent Null ist, z. B. a^0 mit einer andern Potenz von a multiplicirt, z. B. a^4, so ist $a^4 . a^0 = a^{4+0}$ (§. 56.) $= a^4$; a^0 muß

also eine Größe von der Beschaffenheit seyn, daß wenn eine andere Größe mit ihr multiplicirt wird, z. B. a^4, das Product gleich dem Multiplicandus bleibt; es gibt aber keine Größe außer der Einheit, welche diese Eigenschaft hätte (§. 16 Arith.); also ist $a^0 = 1$.

Aus diesem Satze folgt noch ferner, daß alle Größen, deren Exponent Null ist, gleich sind; z. B. $a^0 = b^0 = x^0 = 100^0 = 10^0 = 1^0 = 1$.

§. 60.

Eine Potenz mit einem negativen Exponenten, z. B. a^{-4}, ist einem Bruche gleich, dessen Zähler die Einheit und dessen Nenner die gegebene Potenz mit einem positiven Exponenten ist, d. h. $a^{-4} = \frac{1}{a^4}$.

Jeder negative oder mit — bezeichnete Exponent kann angesehen werden, als entstehe er, wenn man einen eben so großen positiven oder mit + bezeichneten Exponenten von Null subtrahirt (§. 6.). Folglich ist jede Potenz mit einem negativen Exponenten oder $a^{-4} = a^{0-4}$; aber vom Exponenten 0 die Zahl -4 subtrahiren, heißt a^0 durch a^4 dividiren oder $a^{0-4} = \frac{a^0}{4^4}$ (§. 57.); nun ist aber $a^0 = 1$ (§. 59.), also $a^{-4} = \frac{1}{a^4}$.

Auf eben die Art ist $y^{-6} = y^{0-6} = \frac{y^0}{y^6} = \frac{1}{y^6}$

und

und $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ und $m^2 n^{-3} = m^2 \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{m^2}{n^3}$ und $a^m b^{-n} = \frac{a^m}{b^n}$.

Anmerk. Es kommt oft in algebraischen Substitutionen, z. B. in Newtons Binomial-Theorem, vor, daß man Divisionen mit Potenzen in Potenzen mit negativen Exponenten verwandeln soll; z. B. $a^{m-3} = \frac{a^m}{a^3}$.

Um diese drey Lehrsätze (§. 58. 59. 60.) desto leichter einzusehen, denke man sich eine Reihe von Potenzen, welche z. B. mit a^6 anfängt und in der die folgenden Glieder dadurch entstehen, daß man beständig 1 vom Exponenten subtrahirt. Die Reihe wird folgendergestalt aussehen:

$$a^6 . a^5 . a^4 . a^3 . a^2 . a^1 . a^0 . a^{-1} . a^{-2} . a^{-3} . a^{-4} . a^{-5} . a^{-6}.$$

Aber 1 vom Exponenten subtrahiren, heißt durch a dividiren (§. 57.); fängt man nun mit a^6 an und dividirt wirklich durch a, so bekommt die Reihe eine andere Gestalt, ist aber in der That mit der vorigen gleichbedeutend:

$$a^6 . a^5 . a^4 . a^3 . a^2 . a . 1 . \frac{1}{a^1} . \frac{1}{a^2} . \frac{1}{a^3} . \frac{1}{a^4} . \frac{1}{a^5} . \frac{1}{a^6},$$

woraus abermals erhellet, daß $a^1 = a$, $a^0 = 1$, $a^{-1} = \frac{1}{a}$ und $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ ist.

 §. 61.

§. 61.

Wenn eine Potenz mit einem gegebenen Exponenten, z. B. a^n, zu einer Potenz (z. B. der vierten, sechsten oder im allgemeinen zu einer Potenz, deren Exponent $= m$ ist) erhoben werden soll, so multiplicirt man den Exponenten n der Potenz a^n mit dem Exponenten m der Potenz, zu der a^n erhoben werden soll und das Product mn ist der Exponent der verlangten Potenz bey der gegebenen Wurzel, d. h. $(a^n)^m = a^{nm}$.

Soll a^3 quadrirt werden, so findet man das Quadrat $(a^3)^2$, wenn man a^3 mit sich selbst multiplicirt oder $(a^3)^2 = a^3 . a^3 = a^{3+3} = a^{3 \cdot 2} = a^6$. Den Kubus von a^3 oder $(a^3)^3$ findet man, wenn man a^3 dreymal mit sich selbst multiplicirt (§. 54.), welches $a^3 . a^3 . a^3 = a^{3+3+3}$ (§. 56.) $= a^{3 \cdot 3}$ (§. 14. Arith.) gibt, also $(a^3)^3 = a^{3 \cdot 3} = a^9$. Eben so ist das Quadrat von $a^n = a^n . a^n$ (§. 54.) $= a^{n+n}$ (§. 56.) $= a^{2n}$ und der Kubus von $a^n = (a^n)^3 = a^n . a^n . a^n = a^{n+n+n} = a^{3n}$ und die vierte Potenz von $a^n = (a^n)^4 = a^n . a^n . a^n . a^n = a^{n+n+n+n} = a^{4n}$. Aus dieser Induction folgt, daß wenn a^n zur Potenz m erhoben werden soll, man a^n $m$mal mit sich selbst multipliciren müsse (§. 54); dies geschieht aber, wenn man den Exponenten $m$mal zu sich selbst addirt (§. 14. Arith.), also $(a^n)^m = a^{mn}$. Eben so ist x^{-4} zur drit-

ten Potenz erhoben $= (x^{-4})^3 = x^{-12} = \frac{1}{x^{12}}$ (§. 60) und $(x^{-m})^p = x^{-mp} = \frac{1}{x^{mp}}$.

§. 62.

Wenn eine Größe ab, welche ein Product aus mehrern ist, zu einer Potenz n erhoben werden soll, so geschieht das dadurch, daß man jeden der Factoren zur Potenz n erhebt; d. h. $(ab)^n = a^n . b^n$. Wenn a mit b multiplicirt wird, so ist $1 : a = b : ab$ (§. 15. Arith.) und wird diese Proportion Einmal mit sich selbst multiplicirt, so ist $1 : a^2 = b^2 : (ab)^2$ (§. 89. Arith.). Multiplicirt man die Proportion $1 : a = b : ab$ dreymal mit sich selbst, so ist $1 : a^3 = b^3 : (ab)^3$ (§. 89. Arith.). Wird die Grund-Proportion nmal mit sich selbst multiplicirt, so wird jedes Glied zur Potenz n erhoben (§. 54.); also ist $1 : a^n = b^n : (ab)^n$ und wenn man die äußern und mittlern Glieder multiplicirt, so ist $a^n b^n = (ab)^n$ (§. 78. Arith.). Eben so ist $(a^3 b^2)^4 = a^{12} . b^8$ und $(x^2 y^{-3})^3 = x^6 y^{-9} = \frac{x^6}{y^9}$ (§. 60.); ferner $(x^m y^r)^n = x^{mn} . y^{nr}$.

Anmerk. Diese Regel gilt, es mögen so viele Factoren da seyn, als man will. Soll xyzu zur Potenz n erhoben werden, so ist $xyzu = xy . zu$, aber $(xy)^n = x^n y^n$ und $(zu)^n = z^n u^n$; also $(xyzu)^n = x^n y^n z^n u^n$.

§. 63.

Will man einen Bruch $\frac{a}{b}$ zu einer Potenz n erheben, so erhebt man Zähler und Nenner zur gegebenen Potenz, d. h. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Wenn a durch b dividirt wird, so ist $b : a = 1 : \frac{a}{b}$ (§. 20. Arith.), also $b^n : a^n = 1 : \left(\frac{a}{b}\right)^n$ (§. 89. Arith. und §. 54. Algeb.), also $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ (§. 78. Arith.).

Eben so $\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^3 = \frac{x^6}{y^9}$ und $\left(\frac{a^n}{b^m}\right)^4 = \frac{a^{4n}}{b^{4m}}$ und $\left(\frac{x}{z^r}\right)^m = \frac{x^m}{z^{mr}}$.

Anmerk. Wenn mehrere durch + und — verbundene Größen zu einer Potenz erhoben werden sollen, so schließt man sie in eine Parenthese, oder zieht eine Linie über die Wurzel und setzt den Exponenten daneben. Z. B. $(a+b+c)^4$ oder $\overline{a+b+c}^4$ bedeutet die vierte Potenz von $a+b+c$ oder daß diese Wurzel viermal mit sich selbst multiplicirt werden soll. $[(a+b)^2+(c+d)^3]^4$ bedeutet: 1) daß $(a+b)$ quadrirt; 2) $(c+d)$ kubirt und die Summe dieses Quadrats und Kubus zur vierten Potenz erhoben werden soll. Eben so $(((a+b).(x+y))^2+m+n)^3$ bedeu-

deutet: 1) daß (a + b) mit (x + y) multiplicirt; 2) dies Product quadrirt oder $((a + b)(x + y))^2$; 3) zu diesem Quadrate m + n addirt und 4) diese Summe kubirt oder auf die dritte Potenz erhoben werden soll.

§. 64.

So wie die Quadratwurzel aus a mit $\sqrt{a}$ und die Kubicwurzel mit $\sqrt[3]{a}$ (§. 56. 57. Arith.) bezeichnet wird, so bezeichnet man auch die vierte Wurzel mit $\sqrt[4]{a}$, die fünfte Wurzel mit $\sqrt[5]{a}$ u. s. w.. Die achte Wurzel von c schreibt man $\sqrt[8]{a}$ und bedeutet die Größe, welche achtmal mit sich selbst multiplicirt c gibt. Eben so bedeutet $\sqrt[n]{a^m}$, daß aus a^m die nte Wurzel gezogen oder die Größe gefunden werden soll, welche n mal mit sich selbst multiplicirt a^m gibt. Soll eine Wurzel z. B. die sechste aus einer zusammengesetzten Größe m + n gezogen werden, so muß man sie in eine Parenthese einschließen oder einen Strich darüber ziehen und $\sqrt[6]{(m+n)}$ oder $\sqrt[6]{\overline{m+n}}$ schreiben. Eben so bedeutet $\sqrt[3]{((m+x)h)}$ oder $\sqrt[3]{\overline{m+x}\,.\,h}$, daß m + x mit h multiplicirt und aus diesem Product die Kubicwurzel gezogen werden soll. Folgender Ausdruck

$$\sqrt[4]{(\sqrt{(a+b)}\sqrt[3]{(m-n)})} = x$$

bedeutet: 1) daß a und b addirt und daraus die

Qua-

Quadratwurzel gezogen werden soll oder $\sqrt{(a+b)}$; 2) daß n von m subtrahirt und aus dem Unterschied die Kubicwurzel gezogen werden soll oder $\sqrt[3]{(m-n)}$; 3) daß diese Quadrat- und Kubicwurzel oder $\sqrt{(a+b)}$ $\sqrt[3]{(m-n)}$ mit einander multiplicirt und 4) aus diesem Product die vierte Wurzel gezogen werden soll, weßhalb auch noch eine Parenthese nöthig ist; oder auf folgende Weise:

$$\sqrt[4]{\sqrt{a+b}\,.\,\sqrt[3]{m-n}} = x.$$

§. 65.

Eine gegebene Wurzel n aus einer gegebenen Potenz a^m ziehen heißt den Exponenten von a^m durch n dividiren oder $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Die Wurzel n aus a^m ziehen heißt eine Größe finden, welche n mal mit sich selbst multiplicirt a^m hervorbringt; nun gibt es aber keine andere Größe als $a^{\frac{m}{n}}$, welches n mal mit sich selbst multiplicirt oder zur Potenz n erhoben a^m geben könnte; d. h. $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{mn}{n}} = a^m$; also ist die nte Wurzel von a^m oder $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Ferner, wenn man a^m hat, so findet man davon das Quadrat, wenn man den Exponenten mit 2 multiplicirt $= a^{2m}$ (§. 61) und den Kubus $= a^{3m}$ und die

vierte

vierte Potenz $= a^{4m}$ u. s. w., so wie folgende Reihe es angibt:

1	2	3	4	5	6	nte Potenz
a^m	a^{2m}	a^{3m}	a^{4m}	a^{5m}	a^{6m}	a^{nm}

Will man von den Potenzen zurückgehen und sie in ihre Wurzeln auflösen und die zweyte oder Quadratwurzel finden, so ist sie $= \sqrt{a^{2m}} = a^{\frac{2m}{2}} = a^m$; die dritte oder Kubicwurzel $= \sqrt[3]{a^{3m}} = a^m$; die vierte Wurzel $= \sqrt[4]{a^{4m}} = a^m$; die fünfte Wurzel $= \sqrt[5]{a^{5m}} = a^{\frac{5m}{5}} = a^m$ und $\sqrt[n]{a^{mn}} = a^{\frac{mn}{n}} = a^m$.

So ist $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$; $\sqrt[8]{m} = m^{\frac{1}{8}}$; $\sqrt[4]{y^{-3}} = y^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{y^{\frac{3}{4}}}$ (§. 60) $= \frac{1}{\sqrt[4]{y^3}}$ und $\sqrt[m]{y^{nr}} = y^{\frac{nr}{m}}$.

§. 66.

Wenn eine gegebene Wurzel aus einem Product ab gezogen werden soll, so geschieht das, wenn man die Wurzel aus jedem der Factoren ziehet; also $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}$.

Wenn a mit b multiplicirt wird, so ist $1 : a = b : ab$ (§. 15. Arith.) und $1 : \sqrt{a} = \sqrt{b} : \sqrt{ab}$ und $1 : \sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$ (§. 89. Arith.) und allgemein $1 : \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ also $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ (§. 78. Arith.). So ist $\sqrt[3]{a^2 b^3} = \sqrt{a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{3}{3}}}$

$b^{\frac{3}{3}} = a^{\frac{2}{3}} b$ und $\sqrt[3]{a^6 b^{12}} = a^{\frac{6}{3}} b^{\frac{12}{3}} = a^2 b^4$; $\sqrt[3]{y^6 x^{-2}} = y^{\frac{6}{3}} x^{-\frac{2}{3}} = y^2 \cdot \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{y^2}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{y^2}{\sqrt[3]{x^2}}$ und $\sqrt[4]{mn} = m^{\frac{1}{4}} n^{\frac{1}{4}}$.

§. 67.

Wenn aus einem Bruche eine Wurzel gezogen werden soll, so hat man nur nöthig die Wurzel aus dem Zähler und Nenner zu ziehen, oder $\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}}$.

Wenn a durch b dividirt wird, so ist $b : a = 1 : \frac{a}{b}$ (§. 21. Arith.); also $\sqrt[n]{b} : \sqrt[n]{a} = 1 : \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, folglich $\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ (§. 18. Arith.). Z. B. $\sqrt[5]{\left(\frac{a^m}{a^n}\right)} = \frac{\sqrt[5]{a^m}}{\sqrt[5]{a^n}} = \frac{a^{\frac{m}{5}}}{a^{\frac{n}{5}}}$; $\sqrt[4]{\left(\frac{a^8}{b^{12}}\right)} = \frac{\sqrt[4]{a^8}}{\sqrt[4]{b^{12}}} = \frac{a^{\frac{8}{4}}}{b^{\frac{12}{4}}} = \frac{a^2}{b^3}$; eben so $\sqrt{\left(\frac{a^2 m^4}{b^2 n^3}\right)} = \frac{\sqrt{a^2 m^4}}{\sqrt{b^2 n^3}} = \frac{a^{\frac{2}{2}} m^{\frac{4}{2}}}{b^{\frac{2}{2}} n^{\frac{3}{2}}} = \frac{a m^2}{b n^{\frac{3}{2}}} = \frac{a m^2}{b \sqrt{n^3}}$ (§. 65.).

§. 68.

Hieraus folgt:

1) daß sich jeder Ausdruck mit einem Wurzelzeichen in eine Potenz mit einem gebrochenen Exponenteu verwandeln läßt; z. B. $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ und $\sqrt[r]{x^{m+n}} = x^{\frac{m+n}{r}}$ (§. 65).

2)

2) Alle Potenzen mit gebrochenen Exponenten lassen sich in Ausdrücke mit Wurzelzeichen verwandeln, wenn man den Nenner des gebrochenen Exponenten zum Exponenten des Wurzelzeichens macht und das Uebrige unverändert läßt. Z. B. $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$; $a^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{a^{\frac{4}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{a^4}}$; $a^{\frac{m}{n}}\, b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m\, b^m}$; $a^{\frac{2}{3}}\, b^{\frac{4}{5}} = \sqrt[3]{a^2}\, \sqrt[5]{b^4}$ und $a^{\frac{4}{2}}\, b^{\frac{1}{3}} = \sqrt[2]{a^4}\, \sqrt[3]{b} = a^2 \sqrt[3]{b}$.

§. 69.

Eine algebraisch rationale Größe heißt diejenige, welche sich ohne Wurzelzeichen oder wirklichen Bruchexponenten ausdrücken und bezeichnen läßt. Man sieht leicht, daß $m a$, $a b^2 + c d^2$, $x^m\, y^m - g$ rationale Größen sind. Befindet sich in einer Größe oder in einem Ausdruck ein Wurzelzeichen, so ist die Größe noch immer rational, wenn diese Wurzel sich wirklich ausziehen und das Wurzelzeichen sich wegschaffen läßt. So ist z. B. $2 a \sqrt[3]{b^6}$ rational, weil diese Größe $= 2 a b^{\frac{6}{3}} = 2 a b^2$ ist; eben so ist $5 \sqrt{a^4\, b^8} = 5 a^{\frac{4}{2}}\, b^{\frac{8}{2}}$ (§. 68.) $= 5 a^2\, b^4$ und also ebenfalls rational. Im allgemeinen ist eine Größe, obgleich sie unter dem Wurzelzeichen stehet, rational z. B. $\sqrt[m]{x^{mn}}$, wenn der Exponent hinter dem Wurzelzeichen $m n$ sich ohne Rest durch den Exponenten im Wurzelzeichen

zeichen

zeichen m dividiren läßt; z. B. $\sqrt[m]{x^{mn}} = x^{\frac{mn}{m}} = x^n$. Eine algebraisch irrationale Größe heißt eine solche Größe, welche sich nicht ohne Wurzelzeichen oder einen gebrochenen Exponenten ausdrücken läßt; z. B. $\sqrt{3}$ oder $\sqrt{a}$ oder $\sqrt[3]{a^2}$ oder $\sqrt[4]{a^5}$ oder $\sqrt[m]{x^n}$, denn wenn man diese Größen mit einem gebrochenen Exponenten ausdrückt, z. B. $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[4]{a^5} = a^{\frac{5}{4}}$ und $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$, so läßt sich der Zähler nicht ohne Rest durch den Nenner dividiren und der Exponent kann also keine ganze Zahl seyn. Wenn zuweilen algebraische Formeln auf Zahlen angewandt werden, so kann es sich treffen, daß eine algebraisch irrationale Größe arithmetisch rational wird. Z. B. $\sqrt{a} = x$; nimmt man nun $a = 5$ an, so ist $\sqrt{5} = x$ und also arithmetisch irrational (§. 68. Arith.); setzt man aber $a = 9$, so ist $\sqrt{9} = 3 = x$ arithmetisch rational und x wird immer arithmetisch rational seyn, wenn man statt a eine vollkommene Quadratzahl annimmt, obgleich $\sqrt{a}$ eine algebraisch irrationale Größe ist. Eben so ist $\sqrt[3]{(a+b)} = x$, setzt man nun $a = 4$, $b = 7$, so ist $\sqrt[3]{(4+7)} = \sqrt[3]{11} = x$ arithmetisch irrational; setzt man aber $a = 10$ und $b = 17$, so ist $\sqrt[3]{(10+17)} = \sqrt[3]{27} = 3 = x$ arithmetisch rational.

§. 70.

§. 70.

Wenn eine algebraisch irrationale Größe $\sqrt[n]{a^n b^m}$ aus zwey Factoren a^n und b^m besteht, von welchen der eine a^n denselben Exponenten hat als die Wurzel, die ausgezogen werden soll, so setzet man die Wurzel a vor das Wurzelzeichen und läßt das Uebrige hinter demselben unverändert; z. B. $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b^m}$.

$\sqrt{18}$ läßt sich in zwey Factoren zerlegen, nämlich $\sqrt{9 \cdot 2}$, von denen der eine ein vollkommenes Quadrat ist, dessen Wurzel $= 3$ ist; also $\sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2}$ (§. 66) $= 3 \cdot \sqrt{2}$. Eben so ist $\sqrt{a^2 b} = \sqrt{a^2} \sqrt{b} = a\sqrt{b}$ und allgemein $\sqrt[n]{a^n b^m} = a^{\frac{n}{n}} b^{\frac{m}{n}} = a b^{\frac{m}{n}} = a\sqrt[n]{b^m}$ (§. 65).

Beyspiele:

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2}$$
$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{2}$$
$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 4 \cdot \sqrt{2}$$
$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5 \cdot \sqrt{2}$$
$$\sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} = 2 \cdot \sqrt{6}$$
$$\sqrt{54} = \sqrt{9 \cdot 6} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{6} = 3 \cdot \sqrt{6}$$
$$\sqrt{48 a^2 bc} = \sqrt{16 a^2} \cdot \sqrt{3bc} = 4a\sqrt{3bc}$$
$$\sqrt[3]{a^6 b^9 c^2} = a^{\frac{6}{3}} b^{\frac{9}{3}} c^{\frac{2}{3}} = a^2 b^3 \sqrt[3]{c^2}$$
$$\sqrt[n]{x^{3n} y^{2n} z^4} = x^{\frac{3n}{n}} y^{\frac{2n}{n}} z^{\frac{4}{n}} = x^3 y^2 \sqrt[n]{z^4}$$

§. 71.

Man soll zwey Wurzelzeichen auf einerley Benennung bringen d. h. sie so verändern, daß einerley Wurzel aus beyden gezogen werden soll.

1) Man bezeichne die Wurzelgrößen mit Bruchexponenten (§. 65).

2) Diese Brüche bringe man auf gleiche Benennung (§. 38. Arith.)

3) Den gemeinschaftlichen Nenner beyder setze man in das Wurzelzeichen.

Beweis. Wenn zwey Wurzelgrößen verschiedene Exponenten im Wurzelzeichen haben z. B. $\sqrt[m]{x^n}$ und $\sqrt[s]{y^r}$, so ist $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$ und $\sqrt[s]{y^r} = y^{\frac{r}{s}}$. Die beyden gebrochenen Exponenten bringe man auf gleiche Benennung (§. 38. Arith.) nämlich $\frac{n}{m} = \frac{ns}{ms}$ und $\frac{r}{s} = \frac{mr}{ms}$; also $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{ns}{ms}} = \sqrt[ms]{x^{ns}}$ und $\sqrt[s]{y^r} = y^{\frac{mr}{ms}} = \sqrt[ms]{y^{mr}}$.

Beyspiele.

$$\left\{\begin{array}{l} \sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{8}{12}} = \sqrt[12]{a^8} \\ \sqrt[4]{b} = b^{\frac{1}{4}} = b^{\frac{3}{12}} = \sqrt[12]{b^3} \end{array}\right.$$

$$\sqrt[m]{ax} = a^{\frac{1}{m}}\, x^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{n}{mn}}\, x^{\frac{n}{mn}} = \sqrt[mn]{a^n x^n}$$

$$\sqrt[n]{b^3 c^2} = b^{\frac{3}{n}}\, c^{\frac{2}{n}} = b^{\frac{3m}{mn}}\, c^{\frac{2m}{mn}} = \sqrt[mn]{b^{3m} c^{2m}}.$$

§. 72.

§. 72.

Addition und Subtraction irrationaler Größen.

1) Man kürzt die gegebenen irrationalen Größen so viel als möglich ab (§. 70).

2) Wenn nach dieser Abkürzung einerley Größen entweder Zahlen oder Buchstaben hinter dem Wurzelzeichen stehen, z. B. $4\sqrt{3}$ und $2\sqrt{3}$, so können sie als Dinge einerley Art nach den vorhin gegebenen Regeln (§. 5. 6) addirt und subtrahirt werden. Z. B. $4\sqrt{3}+2\sqrt{3}=6\sqrt{3}$; $4\sqrt{3}-2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$.

3) Sind die Größen hinter dem Wurzelzeichen nicht Größen einerley Art, so kann die Addition und Subtraction nur durch Zeichen angedeutet werden; denn $5\sqrt{3}$ und $3\sqrt{2}$ betragen weder 8 Quadratwurzeln aus 3 oder zwey, sondern 5 Quadratwurzeln aus 3 und 3 Quadratwurzeln aus $2 = 5\sqrt{3}+3\sqrt{2}$.

$$\sqrt{48}-\sqrt{50}+\sqrt{20}=4\sqrt{3}-5\sqrt{2}+2\sqrt{5}\ (\S.70)$$
$$\sqrt{12}+\sqrt{162}+\sqrt{45}=2\sqrt{3}+9\sqrt{2}+3\sqrt{5}$$
$$\overline{6\sqrt{3}+4\sqrt{2}+5\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{4a^2b}+\sqrt{9a^2bc}+\sqrt{4x}=2a\sqrt{b}+3a\sqrt{bc}+2\sqrt{x}$$
$$\sqrt{16a^2b}-\sqrt{a^2bc}-\sqrt{16x}=4a\sqrt{b}-a\sqrt{bc}-4\sqrt{x}$$
$$\overline{6a\sqrt{b}+2a\sqrt{bc}-2\sqrt{x}}$$

$$\begin{array}{l} \sqrt{a}+m\sqrt{n} \\ -\sqrt{b}+m\sqrt{g} \\ \hline \sqrt{a}-\sqrt{b}+m\sqrt{n}+m\sqrt{g} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2\sqrt{7}-3\sqrt{4} \\ 3\sqrt{7}-5\sqrt{2} \\ \hline 5\sqrt{7}-3\sqrt{4}-5\sqrt{2} \end{array}$$

Subtraction.

$$\begin{array}{l} 6\sqrt{3}+4\sqrt{2}-3\sqrt{5} \\ 2\sqrt{3}+9\sqrt{2}-6\sqrt{5} \\ -\quad -\quad + \\ \hline 4\sqrt{3}-5\sqrt{2}+3\sqrt{5} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 5a\sqrt{bg}-3c\sqrt[3]{b^2}+2\sqrt[4]{a} \\ -8a\sqrt{bg}+7c\sqrt[3]{b^2}+5\sqrt[4]{a} \\ +\quad -\quad - \\ \hline 13a\sqrt{bg}-10c\sqrt[3]{b^2}-3\sqrt[4]{a} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3\sqrt{5}+3\sqrt{6} \\ 9\sqrt{5}-4\sqrt{5} \\ -\quad + \\ \hline -6\sqrt{5}+3\sqrt{6}+4\sqrt{5} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 4\sqrt{ab}+2\sqrt{a} \\ 6\sqrt{ab}+3\sqrt{b} \\ -\quad - \\ \hline -2\sqrt{ab}+2\sqrt{a}-3\sqrt{b} \end{array}$$

§. 73.

Multiplication irrationaler Größen.

1) Haben die Wurzelzeichen dieselben Exponenten, so multiplicirt man die Coefficienten (wenn es deren gibt) mit einander (§. 8.); dann multiplicirt man die Größen hinter den Wurzelzeichen mit einander und setzt das Wurzelzeichen vor das Product. Z. B. $\sqrt{a}\,.\,\sqrt{b}=\sqrt{ab}$; $2\sqrt{m}\,.-3\sqrt{n}=-6\sqrt{mn}$.

2) Haben die Wurzelzeichen aber verschiedene Exponenten, so muß man die Wurzelgrößen erst auf gleiche

gleiche Benennung bringen (§. 71.). Z. B. $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{b} = \sqrt[6]{a^4} \cdot \sqrt[6]{b^3}$ (wenn man sie auf gleiche Benennung bringt) $= \sqrt[6]{a^4 b^3}$; eben so $\sqrt[m]{a^n} \cdot \sqrt[s]{b^r} = a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{r}{s}}$ (§. 65.) $= a^{\frac{ns}{ms}} b^{\frac{mr}{ms}}$ (§. 71.) $= \sqrt[ms]{a^{ns} b^{mr}}$.

$$\begin{array}{rr} 2\sqrt{a}+\sqrt{b} & \\ 2\sqrt{a}-\sqrt{b} & \\ \hline & -2\sqrt{ab}-\sqrt{b^2} \\ 4\sqrt{aa}+2\sqrt{ab} & \\ \hline 4\sqrt{aa} & -\sqrt{b^2} \\ =4a-b. & \end{array} \qquad \begin{array}{rr} 3\sqrt{2}+\sqrt{3} & \\ 3\sqrt{2}-\sqrt{3} & \\ \hline & -3\sqrt{6}-\sqrt{9} \\ 9\sqrt{4}+3\sqrt{6} & \\ \hline 9\sqrt{4} & -\sqrt{9}=18- \\ & 3=15\ (\S.70.). \end{array}$$

Wenn $a\sqrt[n]{(a+b)}$ mit $b\sqrt[n]{(c+d)}$ multiplicirt werden soll, so multiplicire man zuerst $(a+b)$ mit $(c+d)$, vor welches Product man $\sqrt[n]{}$ setzt $= \sqrt[n]{(ac + bc + ad + bd)}$ und dann noch das Product der beyden Coefficienten a und b. Das endliche Product ist also:

$$a\sqrt[n]{(a+b)} \cdot b\sqrt[n]{(c+d)} = ab\sqrt[n]{(ac+bc+ad+bd)}.$$

$$\begin{array}{l} \quad a+\sqrt{bc} \\ \quad c-\sqrt{bc} \\ \hline \quad -a\sqrt{bc}-\sqrt{b^2c^2} \\ ac+c\sqrt{bc} \\ \hline ac+c\sqrt{bc}-a\sqrt{bc}-\sqrt{b^2c^2}=ac+(c-a) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \sqrt{bc}-bc. \end{array}$$

Beweis. Wenn man $4\sqrt{a}$ mit $5\sqrt{b}$ multipliciren soll, so können in Rücksicht der Zeichen vier Fälle Statt finden (§. 8.). 1) $1 : +4\sqrt{a} = +5\sqrt{b}$: Product (§. 15. Arith.) oder so wie aus der Einheit der eine Factor $+4\sqrt{a}$ entstehet, so entstehet aus dem andern Factor $+5\sqrt{b}$ das Product; wenn man aber fünf positive Wurzeln von b einige Male addirt, so entstehet eine positive Summe; also $+4\sqrt{a} . +5\sqrt{b} = +20\sqrt{ab}$. 2) wenn beyde Factoren negativ sind, so ist $1 : -4\sqrt{a} = -5\sqrt{b}$: Product oder so wie 4 negative Wurzeln von a aus der positiven Einheit entstehen, so entsteht das Product aus dem Gegentheil von $-5\sqrt{b}$, also werden fünf positive Wurzeln von b einige Male zu sich selbst addirt; das Product ist also positiv oder $-4\sqrt{a} . -5\sqrt{b} = +20\sqrt{ab}$. 3) wenn der eine Factor positiv und der andere negativ ist, so ist $1 : +4\sqrt{a} = -5\sqrt{b}$: Product oder 4) $1 : -4\sqrt{a} = +5\sqrt{b}$: Product und in beyden Fällen ist das Product $= -20\sqrt{ab}$ (§. 8.).

§. 74.

Division einer irrationalen Größe durch eine andere.

1) Wenn die Wurzelzeichen einerley Exponenten haben, so dividirt man die Größen hinter den Wurzelzeichen durch einander. Z. B. $\sqrt{a^3}$ durch $\sqrt{a}$

$= \frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\left(\frac{a^3}{a}\right)}$ (§. 60. Arith.) $= \sqrt{a^2}$
$= a$; ferner $\frac{+20\sqrt{ab}}{-5\sqrt{b}} = -4\sqrt{\left(\frac{ab}{b}\right)} =$
$-4\sqrt{a}$; ferner $\frac{30\sqrt{mn}}{4\sqrt{g}} = \frac{30}{4}\sqrt{\left(\frac{mn}{g}\right)}$.

2) Sind die Exponenten in den Wurzelzeichen verschieden, so muß man die Wurzelzeichen erst auf gleiche Benennung bringen (§. 71.) und dann nach der vorigen Regel dividiren. Z. B. $\sqrt[3]{m}$ durch $\sqrt[4]{n}$ ist $= \frac{\sqrt[12]{m^4}}{\sqrt[12]{n^3}} = \sqrt[12]{\left(\frac{m^4}{n^3}\right)}$ (§. 60. Arith.); ferner $\frac{\sqrt[m]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \frac{\sqrt[mn]{x^n}}{\sqrt[mn]{y^m}} = \sqrt[mn]{\left(\frac{x^n}{y^m}\right)}$.

Beweis. Wenn $\sqrt{a}$ durch $\sqrt{b}$ dividirt werden soll, so verhält sich der Divisor zum Dividendus, wie die Einheit zum Quotienten (§. 20. Arith.). In Rücksicht der Zeichen können folgende Veränderungen vorkommen:

1) $+\sqrt{b} : +\sqrt{a} = 1 : +\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)}$

also $\frac{+\sqrt{a}}{+\sqrt{b}} = +\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)}$

2) $-\sqrt{b} : -\sqrt{a} = 1 : +\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)}$

also $\frac{-\sqrt{a}}{-\sqrt{b}} = +\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)}$

$$3)\ +\sqrt{b} : -\sqrt{a} = 1 : -\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)}$$

also $$\frac{-\sqrt{a}}{+\sqrt{b}} = -\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)}$$

$$4)\ -\sqrt{b} : +\sqrt{a} = 1 : -\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)}$$

also $$\frac{+\sqrt{a}}{-\sqrt{b}} = -\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)}.$$

§. 75.

Wenn eine rationale Größe durch eine irrationale Größe dividirt wird, so ist es nicht schwer, den Quotienten zu finden, wenn man die Größen weiß, von welchen der Dividendus ein Product ist. Z. B. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$ (§. 73.), also $\frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$; eben so $\frac{ab}{\sqrt{b}} = a\sqrt{b}$, weil $a\sqrt{b} \cdot \sqrt{b} = ab$ ist. Wenn man sich der Factoren nicht entsinnet, aus welchen der Dividendus zusammengesetzt ist, so kann man sie durch eine Gleichung und deren Auflösung finden. Z. B. wenn $6a^5$ durch $2\sqrt[3]{a^2}$ dividirt werden soll, so nenne man den Quotienten x; also $\frac{6a^5}{2\sqrt[3]{a^2}} = x$ und wenn man mit $2\sqrt[3]{a^2}$ multiplicirt, so hat man $6a^5 = 2x\sqrt[3]{a^2}$ und wenn man allenthalben kubiret, ist $216a^{15} = 8x^3a^2$ und wenn man durch $8a^2$ dividirt, so bekommt man $\frac{216a^{15}}{8a^2} = 27a^{13} = x^3$; man

ziehe

ziehe nun die Kubicwurzel aus, so ist $\sqrt[3]{27a^{13}} = 3\sqrt[3]{a^{13}} = x$, welches der gesuchte Quotient ist, der sich indeß noch einfacher ausdrücken läßt; denn $3\sqrt[3]{a^{13}} = 3\sqrt[3]{a^{12+1}} = 3\sqrt[3]{a^{12}.a}$ (§. 56.) $= 3a^{\frac{12}{3}}a^{\frac{1}{3}}$ (§. 65.) $= 3a^4\sqrt[3]{a}$.

Beyspiel:

$$\begin{array}{l} \text{Divisor} \\ +2\sqrt{3}-5\sqrt{7}) \quad \text{Dividendus} \quad \text{Quotient} \\ -18+14\sqrt{6}+15\sqrt{21}-35\sqrt{14}(-3\sqrt{3}+7\sqrt{2} \\ -18 \qquad\quad +15\sqrt{21} \\ \hline 0+14\sqrt{6} \quad 0 \quad -35\sqrt{14} \\ +14\sqrt{6} \qquad\qquad -35\sqrt{14} \\ \hline 0 \qquad\qquad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Divisor} \\ -4\sqrt{a}+5\sqrt{b} \quad \text{Dividend.} \quad \text{Quotient.} \\ -12a+23\sqrt{ab}-10b(+3\sqrt{a}-2\sqrt{b} \\ -12a+15\sqrt{ab} \\ + \quad - \\ \hline 8\sqrt{ab}-10b \\ 8\sqrt{ab}-10b \\ + \quad + \\ \hline 0 \quad 0 \end{array}$$

§. 76.

Wenn man eine Wurzelgröße $\sqrt[m]{a^n}$ zur Potenz s erheben soll, so multiplicirt man den Exponenten hinter dem Wurzelzeichen n mit dem Exponenten der gegebenen Potenz s; also $(\sqrt[m]{a^n})^s = \sqrt[m]{a^{ns}}$. Denn $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ (§. 65), also $(\sqrt[m]{a^n})^s = a^{\frac{n}{m} \cdot s} = a^{\frac{ns}{m}}$ (§. 62) $= \sqrt[m]{a^{ns}}$. So ist $(\sqrt[4]{a^3})^5 = \sqrt[4]{a^{15}} = \sqrt[4]{{}^{12+3}} = \sqrt[4]{a^{12}}\,\sqrt[4]{a^3}$ (§. 56) $= a^3 \sqrt[4]{a^3}$ (§ 70). Eben so $(p\sqrt[m]{a^n})^s = (p\,a^{\frac{n}{m}})^s = p^s a^{\frac{ns}{m}} = p^s \sqrt[m]{a^{ns}}$ und will man p^s unter das Wurzelzeichen ziehen, so ist $p^s \sqrt[m]{a^{ns}} = \sqrt[m]{a^{ns} p^{ms}}$ (§. 70). Soll $\sqrt[m]{a^n}$ zu einer Potenz mit einem gebrochenen Exponenten erhoben werden z. B. $\frac{s}{r}$, so ist $(\sqrt[m]{a^n})^{\frac{s}{r}} = a^{\frac{n}{m} \cdot \frac{s}{r}} = a^{\frac{ns}{mr}} = \sqrt[mr]{a^{ns}}$.

§. 77.

Soll man eine gewisse Wurzel z. B. s aus einer Wurzelgröße $\sqrt[m]{a^n}$ ziehen, so wird der Exponent des Wurzelzeichens mit dem Exponenten der gegebenen Wurzel multiplicirt und das, was hinter dem Wurzelzeichen steht, bleibt unverändert. Man drücke die Wurzelgröße mit einem gebrochenen Exponenten aus; also $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$

(§

(§. 65); hieraus soll nun die Wurzel s gezogen werden, also $\sqrt[s]{(\sqrt[m]{a^n})} = \sqrt[s]{a^{\frac{n}{m}}}$; aber hieraus die Wurzel s ziehen heißt den Exponenten durch s dividiren (§. 65), welches $a^{\frac{n}{ms}}$ gibt (§. 46 Arith.). Also $\sqrt[s]{\left(\sqrt[m]{a^n}\right)} = \sqrt[s]{a^{\frac{n}{m}}} = a^{\frac{n}{ms}} = \sqrt[ms]{a^n}$ (§. 65).

Wenn aus $p\sqrt[m]{a^n}$ die Wurzel s gezogen werden soll, so ist $\sqrt[s]{\left(p\sqrt[m]{a^n}\right)} = \sqrt[s]{\left(p\,a^{\frac{n}{m}}\right)} = p^{\frac{1}{s}}\,a^{\frac{n}{ms}} = p^{\frac{m}{ms}}\,a^{\frac{n}{ms}} = \sqrt[ms]{p^m\,a^n}$.

Soll man aus $\sqrt[m]{a^n}$ eine gebrochene Wurzel $\frac{s}{r}$ ziehen, so ist $\sqrt[\frac{s}{r}]{(\sqrt[m]{\ })a} = \sqrt[\frac{s}{r}]{a^{\frac{n}{m}}} = a^{\frac{n}{m}:\frac{s}{r}} = a^{\frac{n}{m}\cdot\frac{r}{s}} = a^{\frac{nr}{ms}} = \sqrt[ms]{a^{nr}}$.

§. 78.

Man mag nun + a mit + a oder — a mit — a multipliciren, so entsteht doch das positive Quadrat + a^2 (§. 8); die Wurzel mag also positiv oder negativ seyn, so ist doch das Quadrat positiv. Wenn also aus einer negativen Größe — a^2 die Quadratwurzel gezogen werden soll oder man $\sqrt{-a^2}$ finden will, so kann die Wurzel weder + a noch — a seyn, weil beyde + a^2 aber nicht — a^2 geben; aber $\sqrt{-a^2}$ kann doch auch nicht = o seyn, weil o quadrirt o nicht aber — a^2 gibt. Weil also die Quadrat-

wurzel

wurzel aus einer negativen Größe weder positiv noch negativ noch auch 0 ist, so nennt man sie eine **unmögliche** oder **imaginäre Größe.** So sind $\sqrt{-a^2}$, $\sqrt{-ab}$, $\sqrt{-a}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-16}$, $\sqrt{-20}$ u. s. w. unmögliche Größen.

§. 79.

Alle gerade Wurzeln einer gegebenen negativen Größe $-a$ z. B. die zweyte, vierte, sechste u. s. w. sind unmögliche Größen; aber alle ungerade Wurzeln z. B. die dritte, fünfte, die siebente u. s. w. sind möglich und $\sqrt[n]{-a}$ ist eine allgemeine Formel aller unmöglichen Größen, wenn n eine gerade Zahl ist oder sich durch 2 theilen läßt.

Die Wurzel $+a$ dreymal mit sich selbst multiplicirt gibt einen positiven Kubus oder $+a . +a . + a = +a^3$ und die Wurzel $-a$ gibt einen negativen Kubus oder $-a . -a . -a = -a^3$ (§. 8); die Kubicwurzel aus $-a^3$ oder $\sqrt[3]{-a^3}$ ist also keine unmögliche, sondern eine mögliche wirkliche Größe $-a$ (§. 57. Arith). Auf eben die Art ist $\sqrt[3]{-8} = -2$, $\sqrt[3]{-64} = -4$ und $\sqrt[3]{-14}$ gibt eine mögliche obgleich irrationale Größe (§. 68. Arith.), weil man nur durch Approximation den Werth der Wurzel finden kann (§. 67. Arith.)

Wenn

Wenn man eine negative Größe — a als eine Wurzel betrachtet, so werden ihre Werthe folgende seyn:

Die erste Potenz	$-a$, also die Wurzel	$\sqrt{-a}$ unmöglich
2te	$+a^2$	$\sqrt{-a^2}$ unmöglich
3te	$-a^3$	$\sqrt[3]{-a^3} = -a$
4te	$+a^4$	$\sqrt[4]{-a^4}$ unmöglich
5te	$-a^5$	$\sqrt[5]{-a^5} = -a$
6te	$+a^6$	$\sqrt[6]{-a^6}$ unmöglich
7te	$-a^7$	$\sqrt[7]{-a^7} = -a$
8te	$+a^8$	$\sqrt[8]{-a^8}$ unmöglich.

§. 80.

Addition und Subtraction unmöglicher Größen.

1) Wenn die Größen hinter dem Wurzelzeichen dieselben sind, so addirt und subtrahirt man sie wie Größen einerley Art. Z. B. $\sqrt{-a}$ und $\sqrt{-a}$ geben addirt $2\sqrt{-a}$ und $3\sqrt{-2}$ und $\sqrt{-2}$ geben subtrahirt $2\sqrt{-2}$ (§. 5. 6).

2) Sind aber die negativen Größen hinter dem Wurzelzeichen verschieden, so können sie nicht wie Dinge einerley Art addirt und subtrahirt werden. Z. B. $3\sqrt{-2}$ und $2\sqrt{-4} = 3\sqrt{-2} + 2\sqrt{-4}$.

Addition.

Addition.

$$3\sqrt{-3}+4\sqrt{-4}-6\sqrt{-5}+3\sqrt{-8}-7\sqrt{-11}$$
$$2\sqrt{-3}-3\sqrt{-4}-5\sqrt{-5}-\sqrt{-8}+\sqrt{-10}$$
$$\overline{5\sqrt{-3}+\sqrt{-4}-11\sqrt{-5}+2\sqrt{-8}-7\sqrt{-11}+\sqrt{-10}.}$$

Subtraction.

$$2\sqrt{-a}-3\sqrt{-b}+4\sqrt{-c}+5\sqrt{-d}-6\sqrt{-e}$$
$$3\sqrt{-a}+4\sqrt{-b}+5\sqrt{-c}-2\sqrt{-d}-4\sqrt{-g}$$
$$-\quad-\quad-\quad+\quad+$$
$$\overline{-\sqrt{-a}-7\sqrt{-b}-\sqrt{-c}+7\sqrt{-d}+4\sqrt{-g}-6\sqrt{-e}.}$$

§. 81.

Zwey unmögliche Größen mit einander multiplicirt, geben ein mögliches Product.

Es läßt sich nicht bezweifeln, daß eine unmögliche Größe mit sich selbst multiplicirt ein mögliches Product gibt; z. B. $\sqrt{-a}\,.\,\sqrt{-a}=-a$ (§. 78.), also eine mögliche Größe. Eben so $\sqrt{-ab}\,.\,\sqrt{-ab}=-ab$, welches eine wirkliche Größe ist. Allgemein gibt $\sqrt{-a}\,.\,\sqrt{-b}$ zum Product $\sqrt{ab}$; denn $1:-a=-b:+ab$ (§. 15. Arith.), ziehet man nun die Quadratwurzel aus, so ist $1:\sqrt{-a}=\sqrt{-b}:\sqrt{ab}$ (§. 90. Arith.); also $\sqrt{-a}\,.\,\sqrt{-b}=\sqrt{ab}$ (§. 78. Algebra); also ist das Product eine mögliche Größe.

§. 82.

§. 82.

Eine mögliche und eine unmögliche Größe mit einander multiplicirt, geben ein unmögliches Product.

Wenn $-a$ mit $+b$ multiplicirt wird, so ist $1 : -a = +b : -ab$ (§. 15. Arith.) und wenn man die Quadratwurzel ausziehet, so ist $1 : \sqrt{-a} = \sqrt{+b} : \sqrt{-ab}$ und $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{+b} = \sqrt{-ab}$ (§. 90. Arith.); also ist das Product eine unmögliche Größe (§. 78. Algebra).

Anmerk. Verschiedene Mathematiker sind der Meinung gewesen, daß $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$ ein unmögliches Product $\sqrt{-ab}$ gäbe. Man s. Wolff. elem. Analyſ. finit. §. 71.; Hell elem. Algeb. p. 171; Klems erste Gründe der Mathem. S. 298. Sie unterstützen ihre Meinung dadurch, daß aus zwey unmöglichen Dingen kein mögliches entstehen könne; allein hierauf läßt sich antworten, daß sie ja alle selbst einstimmig zugeben, daß $\sqrt{-a}$ mit $\sqrt{-a}$ multiplicirt zum Product $-a$ gibt, welches eine mögliche Größe und ein Beyspiel ist, welches ihrem angenommenen Grundsatze widerspricht. Ueberdies darf man sich darüber nicht mehr wundern, daß zwey unmögliche Größen ein mögliches Product geben, als darüber, daß zwey negative Größen ein positives Product geben. Euler hat diesen

sen richtigen Satz angenommen (Algebra 1 Theil, S. 62.), indeß keinen Beweis desselben gegeben. Einen ausführlichen Beweis habe ich in de förste Grunde til Regnekonsten og Algebra, Kbhavn. 1772. S. 339-346. gegeben.

§. 83.

Multiplication unmöglicher Größen mit unmöglichen und möglichen.

1) Man multiplicire die Größen hinter dem Wurzelzeichen mit einander und bestimme, ob das Product möglich oder unmöglich ist (§. 81. 82.).

2) Darauf multiplicire man die Coefficienten, wenn deren da sind und diese wieder mit der möglichen Größe, wenn eine solche entstanden ist, wodurch sich das Zeichen des Products bestimmt (§. 8.).

Z. B.

$$\begin{array}{c} -\sqrt{-a} \\ -\sqrt{-a} \\ \hline +1.-a=-a \end{array} \qquad \begin{array}{c} +2\sqrt{-a} \\ -3\sqrt{-a} \\ \hline -6.-a=+6a \end{array} \qquad \begin{array}{c} +2\sqrt{-a} \\ +3\sqrt{-a} \\ \hline +6.-a=-6a \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -4\sqrt{-2}+3\sqrt{-4}-2\sqrt{-3} \\ -2\sqrt{-3} \\ \hline 8\sqrt{-6}-6\sqrt{-12}+4\sqrt{-9} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3\sqrt{-a}+3\sqrt{-b} \\ 3\sqrt{-a}+3\sqrt{-b} \\ \hline 9\sqrt{-ab}-9b \\ -9a+9\sqrt{-ab} \qquad \\ \hline -9a+18\sqrt{-ab}-9b. \end{array}$$

§. 84.

§. 84.

Wenn eine unmögliche Größe durch eine unmögliche Größe dividirt wird, so ist der Quotient eine mögliche Größe.

Wenn $\sqrt{+a}$ mit $\sqrt{-a}$ multiplicirt wird, so ist das Product $= \sqrt{-aa}$ (§. 82), wird nun dies Product durch den einen unmöglichen Factor $\sqrt{-a}$ dividirt, so erhält man den andern möglichen Factor; also $\frac{\sqrt{-aa}}{\sqrt{-a}} = \sqrt{a}$, welches eine mögliche Größe ist.

Wenn man $\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ mit $\sqrt{-a}$ multiplicirt, so ist das Product $= \frac{\sqrt{-ab}}{\sqrt{+b}} = \sqrt{\left(\frac{-ab}{+b}\right)} = \sqrt{-a}$; dividirt man nun dies unmögliche Product $= \sqrt{-a}$ durch den unmöglichen Factor $\sqrt{-b}$, so bekommt man den andern möglichen Factor $\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)}$; also ist $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)}$.

So ist $\frac{\sqrt{-4}}{\sqrt{-1}} = \sqrt{\left(\frac{-4}{-1}\right)} = \sqrt{4} = 2$; eben so $\frac{\sqrt{-10}}{\sqrt{-2}} = \sqrt{\left(\frac{-10}{-2}\right)} = \sqrt{5}$ und $\frac{6\sqrt{-12}}{2\sqrt{-3}} = \frac{6}{2}\sqrt{\left(\frac{-12}{-3}\right)} = 3\sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6$.

§. 85.

Die Division einer möglichen Größe durch eine unmögliche oder einer unmöglichen Größe durch

durch eine mögliche gibt einen unmöglichen Quotienten.

1) Weil $\sqrt{-1} . \sqrt{-a} = \sqrt{a}$ ist (§. 81), so ist auch $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-a}} = \sqrt{-1}$, welches eine unmögliche Größe ist (§. 79). Eben so ist $\sqrt{\left(-\frac{a}{b}\right)} . \sqrt{-b} = \sqrt{\left(\frac{+a}{-b}\right)} . \sqrt{-b} = \sqrt{\left(\frac{-ab}{-b}\right)}$ (§. 83) $= \sqrt{+a}$. Wenn man also diese Größe $\sqrt{+a}$ durch $\sqrt{-b}$ dividirt, so ist $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}} = \sqrt{\left(-\frac{a}{b}\right)}$, welches eine unmögliche Größe ist. Ferner $\sqrt{-a} . \sqrt{-a} = -a$ und also $\frac{-a}{\sqrt{-a}} = \sqrt{-a}$, welcher Quotient unmöglich ist.

2) Wenn der Dividendus eine unmögliche aber der Divisor eine mögliche Größe ist, so ist der Quotient auch unmöglich. Weil $\sqrt{a} . \sqrt{-a} = \sqrt{-a^2}$ ist (§. 82), so ist $\frac{\sqrt{-a^2}}{\sqrt{a}} = \sqrt{-a}$ und unmöglich. Ferner $\sqrt{-a} . \sqrt{-a} = -a$; wenn man also $\sqrt{-a}$ durch $-a$ dividirt, so ist der Quotient $= \frac{\sqrt{-a}}{-a} = \frac{1}{\sqrt{-a}}$ und also unmöglich.

Weil $\sqrt{-b} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{-ab}$ (§. 82), so ist, wenn man $\sqrt{-ab}$ durch $\sqrt{a}$ dividirt, der Quotient $= \frac{\sqrt{-ab}}{\sqrt{a}} = \sqrt{-b}$ unmöglich.

So ist $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}} = \sqrt{-2}$; ferner $\frac{8}{\sqrt{-2}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{-2}} = \sqrt{-32}$; ferner $\frac{6\sqrt{8}}{-2\sqrt{-4}} = -3 \cdot \sqrt{-2}$.

Eben so $\frac{a}{\sqrt{-b}} = \frac{\sqrt{aa}}{\sqrt{-b}} = \sqrt{\left(\frac{+aa}{-b}\right)} = \sqrt{\left(-\frac{aa}{b}\right)}$

Ferner $\frac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{-5}$; ferner $\frac{-8\sqrt{-6}}{2\sqrt{3}} = -4\sqrt{-2}$; ferner $\frac{8\sqrt{-36}}{4} = 2\sqrt{-36}$.

Fünftes Kapitel.

Quadratische Gleichungen.

---

§. 86.

Eine quadratische Gleichung oder eine Gleichung vom zweyten Grade ist eine solche, in der das Quadrat der unbekannten Größe vorkommt; z. B. $y^2 = 100$ oder $ax + x^2 = b$. Eine quadratische Gleichung heißt vollständig, wenn sie ein voll-

ständiges Quadrat der unbekannten Größe enthält z. B. $z^2 = 8$ und $x^2 + 2ax + a^2 = d^2$. Weil das Quadrat x^2 sowohl durch die Multiplication von $+x$ mit $+x$ als auch durch $-x \cdot -x$ (§. 8) entstehen kann, so muß auch die Wurzel von x^2 einen doppelten nämlich einen positiven und negativen Werth haben, so daß, wenn $x^2 = 100$ und man auf beyden Seiten die Quadratwurzel ausziehet, $x = \pm 10$ ist, d. h. x kann nicht allein $= +10$ sondern auch $= -10$ seyn. Wenn $x^2 + b^2 = a^2$, so muß b^2 erst mit dem entgegengesetzten Zeichen auf die andere Seite gebracht werden; also $x^2 = a^2 - b^2$ und wenn man auf beyden Seiten die Quadratwurzel ausziehet, ist $x = \pm \sqrt{(a^2 - b^2)}$. Wollte man diese Gleichung in Zahlen ausdrücken, so könnten dabey drey Fälle Statt finden: 1) ist der Unterschied zwischen a^2 und b^2 ein wirkliches Quadrat, so hat x einen vollständigen und genau bestimmten Werth; 2) ist $a^2 - b^2$ kein wirkliches Quadrat, so ist x eine irrationale Zahl, welche man nicht durch eine bestimmte endliche Zahl ausdrücken, sondern nur durch Näherung finden kann (§. 62. 63. Arith.); 3) ist $a^2 < b^2$, so ist $a^2 - b^2$ eine negative Größe (§. 93), folglich $\sqrt{(a^2 - b^2)}$ eine unmögliche Größe, weil die Quadratwurzel aus einer negativen Größe unmöglich ist (§. 78.). Dennoch finden aber auch in diesem Fall zwey Werthe für

x Statt. Es sey $x^2 = -49$, so ist $x = \pm \sqrt{-49}$; der eine Werth ist also $= +\sqrt{-49} = +7 \cdot \sqrt{-1}$ und der andere $= -7 \cdot \sqrt{-1}$ (§. 70. 83.).

§. 87.

Wenn $a + x = b$ ist und man auf beyden Seiten quadrirt, so ist $a^2 + 2ax + x^2 = b^2$ eine vollständige quadratische Gleichung; ferner wenn $5 + x = 10$, so ist $25 + 10x + x^2 = 100$ eine vollständige quadratische Gleichung. Wenn die Quadratwurzel ausgezogen wird, so ist $5 + x = \pm 10$ und $x = \pm 10 - 5$ und x hat einen doppelten Werth: den einen $= +5$, den andern $= -15$. Aus der Gleichung $a^2 + 2ax + x^2 = b^2$ findet man $a + x = + b$ und $x = + b - a$. Auch die Gleichung $y^2 - ay + \frac{1}{4}a^2 = d + g$ ist eine vollständige quadratische Gleichung, weil $(y - \frac{1}{2}a) \cdot (y - \frac{1}{2}a) = y^2 - ay + \frac{1}{4}a^2$ ist; ziehet man also die Quadratwurzel aus, so ist $y - \frac{1}{2}a = \pm \sqrt{(d + g)}$.

Ist folgende quadratische Gleichung gegeben:
$x^2 + 2ax + g - c = 2bx - a^2 + 2ab - b^2$
so muß man zuerst alle x auf einerley Seite bringen,
$x^2 + 2ax - 2bx = c - g - a^2 + 2ab - b^2$
und $-a^2 + 2ab - b^2$ auf die andere Seite setzen; also
$x^2 + 2ax - 2bx + a^2 - 2ab + b^2 = c - g$
$x^2 + (2a - 2b)x + a^2 - 2ab + b^2 = c - g$

Alle Größen auf der linken Seite der Gleichung machen ein vollständiges Quadrat aus, dessen Wurzel $= x + a - b$ ist, weil es aus dem Quadrat des ersten Theils der Wurzel oder x^2 aus dem zwiefachen Product des zweyten Theils oder $a - b$ in den ersten x oder $(2a - 2b) \cdot x$ und aus dem Quadrat des zweyten Theils $a - b$ oder $a^2 - 2ab + b^2$ (§. 64. Arith.). Wenn man also die Quadratwurzel ausziehet, so ist

$$x + a - b = \pm \sqrt{(c - g)}$$
$$x = -a + b \pm \sqrt{(c - g)}$$

§. 88.

Erste Aufgabe. Mehrere Kaufleute treten in eine Handlungsgesellschaft und jeder von ihnen schießt 30 mal so viele Rthlr. her, als ihrer Personen da sind. Ferner gewinnt jeder von ihnen auf 100 Rthlr. 5 mal so viel, als ihrer Personen da sind und der achte Theil des gesammten Gewinnes mit $\frac{5}{38}$ multiplicirt, ist der Anzahl der Personen gleich. Man fragt: wie viele Personen waren da und wie viel hat jeder hergeschossen?

Man nenne die Anzahl der Personen $= x$, so hat jeder von ihnen $= 30x$ hergeschossen und die ganze Gesellschaft $= 30x^2$. Ferner werden auf 100 ℛ 5 x ℛ gewonnen, auf das ganze Kapital $30x^2$ also

$= \frac{90x^3}{100}$. Der achte Theil hievon ist $= \frac{90x^3}{800} = \frac{9x^3}{80}$; dies mit $\frac{5}{36}$ multiplicirt, gibt $= \frac{45x^3}{2880} = \frac{x^3}{64}$. Nach der Bedingung der Aufgabe soll diese Größe der Anzahl der Personen gleich seyn; also $\frac{x^3}{64} = x$ und $x^3 = 64x$ und endlich $x = \pm 8$; die Gesellschaft bestand also aus 8 Personen und jeder hat $8 \cdot 30 = 240$ xr hergeschossen.

§. 89.

Zweyte Aufgabe. **Man soll zwey Zahlen finden: eine größere $= x$ und eine kleinere $= y$, deren Summe sich zur größern wie $7:5$ verhält und mit der kleinern multiplicirt $= 126$ gibt.**

Nach den Bedingungen der Aufgabe ist $x + y : x = 7:5$ oder $\frac{x}{x+y} = \frac{5}{7}$ (§. 73. Arith.).

Ferner ist vermöge der zweyten Bedingung $(x+y)y = 126$; also

1 | $\frac{x}{x+y} = \frac{5}{7}$

2 | $(x+y)y = 126 = xy + y^2$

$2 \cdot 1 = 3$ | $\frac{(x+y)xy}{x+y} = xy = 126 \cdot \frac{5}{7} = 90$

$2 - 3 = 4$ | $y^2 = 126 - 90 = 36$

$\sqrt{} \cdot 4 = 5$ | $y = \pm \sqrt{36} = \pm 6$

$\frac{3}{y} = 6$ | $x = \frac{90}{y} = \frac{90}{\pm 6} = \pm 15$.

§. 90.

Dritte Aufgabe. Drey Zahlen x, y und z von der Beschaffenheit zu finden, daß die Summe der Producte der ersten Zahl x in die beyden andern y und z einer gegebenen Zahl 14 gleich ist (d. h. $xy + xz = 14$); die Summe der Producte der zweyten Zahl y in die erste und dritte einer gegebenen Zahl 18 gleich ist (d. h. $xy + yz = 18$) und die Summe der Producte der dritten Zahl z in die beyden ersten einer gegebenen Zahl 20 gleich ist (d. h. $xz + yz = 20$).

1	$xy + xz = 14$
2	$xy + yz = 18$
3	$xz + yz = 20$
$1+2+3=4$	$2xy + 2yz + 2xz = 52$
$4:2 = 5$	$xy + yz + xz = 26$
$5-1=6$	$yz = 26 - 14 = 12$
$5-2=7$	$xz = 26 - 18 = 8$
$5-3=8$	$xy = 26 - 20 = 6$
$6.7.8=9$	$x^2y^2z^2 = 576$
$\sqrt{9} = 10$	$xyz = 24$
$10:yz=11$	$x = \frac{24}{yz} = \frac{24}{12} = 2$
$10:xz=12$	$y = \frac{24}{xz} = \frac{24}{8} = 3$
$10:xy=13$	$z = \frac{24}{xy} = \frac{24}{6} = 4.$

§. 91.

Vierte Aufgabe. Es ist die Summe zweyer Zahlen $= s$ und ihr Product $= p$ gegeben; man soll die Zahlen selbst finden.

Statt der Zahlen selbst kann man ihren Unterschied $= x$ suchen, weil die gegebene halbe Summe nebst dem halben Unterschied die größere und die gegebene halbe Summe vermindert um den halben Unterschied die kleinere Zahl gibt (§. 47. Algebr.); also

$$\text{die größere Zahl} = \tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{2}x$$
$$\text{die kleinere Zahl} = \tfrac{1}{2}s - \tfrac{1}{2}x$$

$$- \tfrac{1}{4}sx - \tfrac{1}{4}x^2$$
$$\tfrac{1}{4}s^2 + \tfrac{1}{4}sx$$

$$\text{Product} = \tfrac{1}{4}s^2 - \tfrac{1}{4}x^2 = p$$
$$s^2 - x^2 = 4p$$
$$s^2 - 4p = x^2$$
$$\pm\sqrt{(s^2 - 4p)} = x$$

$$\text{die größere Zahl} = \tfrac{1}{2}s \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(s^2 - 4p)}$$

$$\text{die kleinere Zahl} = \tfrac{1}{2}s \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{(s^2 - 4p)}$$

Es sey $s = 14$ und $p = 48$, so ist die eine Zahl $= 7 \pm \frac{1}{2}\sqrt{(196 - 192)} = 7 \pm \frac{2}{2} = 7 \pm 1$ und also die eine Zahl $= 8$ oder $= 6$; die andere Zahl $= 7 \mp \frac{1}{2}\sqrt{(196 - 192)} = 7 \mp \frac{2}{2} = 7 \mp 1$ und also die andere Zahl entweder 6 oder 8.

§. 93.

Eine unvollständige oder unreine quadratische Gleichung heißt diejenige, in der außer dem Quadrat der unbekannten Größe diese noch mit einer bekannten Größe multiplicirt vorkommt. Z. B. $12x + x^2 = 100$, $2ax + x^2 = b^2$.

§. 94.

Auflösung einer unvollständigen quadratischen Gleichung.

1) Man bringe alle Glieder, welche das Quadrat der unbekannten Größe oder die unbekannte Größe selbst enthalten, auf eine und dieselbe Seite, jedoch dergestalt, daß man das Quadrat der unbekannten Größe positiv erhält (§. 78.).

2) Ist das Quadrat der unbekannten Größe mit einer Größe multiplicirt, so muß man die ganze Gleichung erst durch diesen Factor dividiren; ist aber das Quadrat durch eine Größe dividirt, so muß man die ganze Gleichung damit multipliciren.

3) Man halbire die Größe, welche Coefficient der unbekannten Größe ist (ist kein anderer Coefficient da, so ist derselbe = 1) und addire das Quadrat derselben auf beyden Seiten.

4) Darauf ziehe man die Quadratwurzel auf beyden Seiten aus und bringe das Bekannte auf die gehörige Weise (§. 21.) auf die andere Seite, so

hat

hat man den Werth der unbekannten Größe in lauter bekannten Größen und die Gleichung ist aufgelöst.

Beweis. Die allgemeine Form einer unvollständigen quadratischen Gleichung ist $px + x^2 = q$. Da man nun annimmt, daß px eine völlig unveränderte Größe und also das Product des zwiefachen ersten Theils der Wurzel in den zweyten Theil der Wurzel x ist (§. 64. Arith.), so ist p der zwiefache erste Theil und also der einfache erste Theil $= \frac{1}{2}p$, dessen Quadrat $= \frac{1}{4}p^2$ fehlt; addirt man also dies auf beyden Seiten, so ist $\frac{1}{4}p^2 + px + x^2 = \frac{1}{4}p^2 + q$ (§. 64. Arith.) und wenn man die Quadratwurzel ausziehet, so hat man

$$\tfrac{1}{2}p + x = \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)} \text{ und}$$

$$x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 + q)}.$$

Anmerk. Daß die Wurzel richtig gefunden ist, ersieht man daraus, daß $(\frac{1}{2}p + x) \cdot (\frac{1}{2}p + x) = \frac{1}{4}p^2 + px + x^2$ (§. 8.). Wäre die Gleichung $-px + x^2 = q$, so wäre die vollständige quadratische Gleichung $\frac{1}{4}p^2 - px + x^2 = \frac{1}{4}p^2 + q$ und weil $(-\frac{1}{2}p + x) \cdot (-\frac{1}{2}p + x) = \frac{1}{4}p^2 - px + x^2$ (§. 8.), so ist die Wurzel $= -\frac{1}{2}p + x = \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$ und endlich $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + q)}$.

Erstes Beyspiel.

$$\begin{array}{r|l} 1 & 12x + x^2 = 64 \\ 1 + 36 = 2 & 36 + 12x + x^2 = 100 \\ \sqrt{2} = 3 & 6 + x = \pm 10 \\ 3 - 6 = 4 & x = -6 \pm 10, \end{array}$$

also x entweder $= +4$ oder $= -16$.

Zweytes Beyspiel.

$$\begin{array}{r|l} 1 & -10x + x^2 = -9 \\ 1 + 25 = 2 & 25 - 10x + x^2 = 16 \\ \sqrt{2} = 3 & -5 + x = \pm 4 \\ 3 + 5 = 4 & \quad x = 5 \pm 4, \end{array}$$

also $x = 9$ oder $= 1$.

Drittes Beyspiel.

$$\begin{array}{r|l} 1 & 4x + 4x^2 = 15 \\ 1 : 4 = 2 & x + x^2 = \frac{15}{4} \\ 2 + \frac{1}{4} = 3 & \frac{1}{4} + x + x^2 = \frac{15}{4} + \frac{1}{4} = \frac{16}{4} = 4 \\ \sqrt{3} = 4 & \frac{1}{2} + x = \pm 2 \\ 4 - \frac{1}{2} = 5 & \quad x = -\frac{1}{2} \pm 2, \end{array}$$

also x entweder $= -2\frac{1}{2}$ oder $+1\frac{1}{2}$.

Viertes Beyspiel.

$$\begin{array}{r|l} 1 & \frac{2mnx}{p} + x^2 = q \\ 1 + \frac{m^2n^2}{p^2} = 2 & \frac{m^2n^2}{p^2} + \frac{2mnx}{p} + x^2 = \frac{m^2n^2}{p^2} + q \\ \sqrt{2} = 3 & \frac{mn}{p} + x = \pm \sqrt{\left(\frac{m^2n^2}{p^2} + q\right)} \\ 3 - \frac{mn}{p} = 4 & x = -\frac{mn}{p} \pm \sqrt{\left(\frac{m^2n^2}{p^2} + q\right)}. \end{array}$$

Fünf

Fünftes Beyspiel. Die Auflösung einer Aufgabe habe folgende Gleichung gegeben:

$$az^2 - bz^2 = abc - aff + 2afz$$

so muß man zuerst das Bekannte und Unbekannte zusammenstellen:

$$az^2 - bz^2 - 2afz = abc - aff$$

$$(a-b)\ z^2 - 2afz = abc - aff$$

und wenn man auf beyden Seiten durch $a - b$ dividirt, so ist

$$z^2 - \frac{2afz}{a-b} = \frac{abc - aff}{a-b}.$$

Der zwiefache zweyte Theil der Wurzel ist $= \frac{2af}{a-b}$ und der zweyte Theil selbst $= \frac{af}{a-b}$ und dessen Quadrat $= \left(\frac{af}{a-b}\right)^2 = \frac{a^2 f^2}{a^2 - 2ab + b^2}$ addire man auf beyden Seiten, so ist

$$z^2 - \left(\frac{2af}{a-b}\right) z + \left(\frac{af}{a-b}\right)^2 = \frac{a^2 f^2}{a^2 - 2ab + b^2} + \frac{abc - aff}{a-b}.$$

Den letzten Bruch rechter Hand $\frac{abc - aff}{a-b}$ bringe man mit dem ersten auf gleiche Benennung, daß man Zähler und Nenner desselben mit $a - b$ multiplicirt, wodurch der Werth des Bruchs nicht verändert wird; also

z^2

$$z^2-\left(\frac{2af}{a-b}\right)z+\left(\frac{af}{a-b}\right)^2=\frac{a^2f^2}{a^2-2ab+b^2}+\frac{(abc-af^2).(a-b)}{(a-b)^2}$$

oder

$$z^2-\left(\frac{2af}{a-b}\right)z+\left(\frac{af}{a-b}\right)^2=\frac{a^2f^2}{a^2-2ab+b^2}+\frac{a^2bc-a^2f^2-ab^2c+abf^2}{a^2-2ab+b^2}.$$

Wenn man nun die Zähler der beyden Brüche addirt und $+a^2f^2$ gegen $-a^2f^2$ sich aufheben läßt, so ist

$$z^2-\left(\frac{2af}{a-b}\right)z+\left(\frac{af}{a-b}\right)^2=\frac{a^2bc-ab^2c+abf^2}{a^2-2ab+b^2}.$$

Man ziehe nun die Quadratwurzel aus, welches rechter Hand nur beym Nenner, nicht aber beym Zähler geschehen kann; also

$$z-\frac{af}{a-b}=\frac{\pm\sqrt{(a^2bc-ab^2c+abf^2)}}{a-b} \text{ und}$$

$$z=\frac{af}{a-b}\frac{\pm\sqrt{(a^2bc-ab^2c+abf^2)}}{a-b}.$$

§. 95.

Fünfte Aufgabe. **Es ist die Differenz $=6$ und das Product $=720$ zweyer Zahlen gegeben; man soll die Zahlen selbst finden.**

Die kleinere Zahl sey $=x$, so ist die größere $=x+6$ und ihr Product $=(x+6)x=x^2+6x=720$; also

$$
\begin{array}{r|l}
1 & x^2 + 6x = 720 \\
1 + 9 = 2 & x^2 + 6x + 9 = 729 \\
\sqrt{2} = 3 & x + 3 = \pm 27 \\
3 - 3 = 4 & x = \pm 27 - 3,
\end{array}
$$

also ist die kleinere Zahl entweder $+ 27 - 3 = 24$ oder $- 27 - 3 = - 30$ und die größere $= x + 6$ entweder $= 24 + 6 = 30$ oder $- 30 + 6 = - 24$.

Will man die Auflösung allgemein machen, so kann man die gegebene Differenz $= d$ und das gegebene Product $= p$ nennen. Es sey nun die kleinere Zahl $= x$, so ist die größere $= x + d$ und das Product $= (x + d)\,x = x^2 + xd$; also

$$
\begin{array}{r|l}
1 & x^2 + dx = p \\
1 + \frac{1}{4}d^2 = 2 & x^2 + dx + \frac{1}{4}d^2 = \frac{1}{4}d^2 + p \\
\sqrt{2} = 3 & x + \frac{1}{2}d = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + p)} \\
3 - \frac{1}{2}d = 4 & x = - \frac{1}{2}d \pm \sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + p)}
\end{array}
$$

Die größte Zahl $= x + d = d - \frac{1}{2}d \pm \sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + p)}$
$= \frac{1}{2}d \pm \sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + p)}$.

§. 96.

Sechste Aufgabe. Man soll eine gegebene Zahl 60 in zwey Theile dergestalt theilen, daß das Quadrat des größern Theils multiplicirt mit dem kleinern nebst dem Quadrat des größern Theils multiplicirt mit dem größern Theil einer gegebenen Zahl 51840 gleich ist.

Der

Der größere Theil sey $= x$, so ist der kleinere Theil $= 60 - x$ und das Quadrat des größern Theils x^2 multiplicirt mit dem kleinern $60 - x = (60 - x) x^2 = 60x^2 - x^3$; das Quadrat des kleinern Theils $= (60 - x)^2 = 3600 - 120x + x^2$ und multiplicirt mit dem größern Theil $x = (3600 - 120x + x^2) x = 3600x - 120x^2 + x^3$. Diese Producte addirt sollen $= 51840$ seyn; also sieht die Grundgleichung so aus:

$$60x^2 - x^3 + 3600x - 120x^2 + x^3 = 51840$$
$$60x^2 + 3600x - 120x^2 = 51840$$
$$-60x^2 + 3600x = 51840$$
$$-x^2 + 60x = \frac{51840}{60} = 864$$

Hier hat man nun ein negatives Quadrat $-x^2$, welches unmöglich ist. Die Gleichung läßt sich also in diesem Zustande nicht auflösen, sondern man muß alle Glieder der einen Seite der Gleichung mit veränderten Zeichen auf die andere Seite bringen; jedoch kann man sie auch stehen lassen und bloß die Zeichen verändern, welches einerley gibt. Letztere Gleichung ist dann der ersten gleich (§. 21.) und das Quadrat von x wird dadurch positiv; also

$$x^2 - 60x = -864$$
$$x^2 - 60x + 900 = 900 - 864 = 36$$
$$x - 30 = \pm\sqrt{36} = \pm 6$$
$$x = \pm 6 + 30.$$

Der

Der Werth von x ist also entweder $+6+30=+36$ oder $-6+30=+24$.

Der andere Theil ist $60-x$ und folglich entweder $60-36=24$ oder $60-24=36$.

§. 97.

Siebente Aufgabe. **Man soll die Zahl 18 in zwey Theile dergestalt theilen, daß das Product dieser Theile = 90 ist.**

Man nenne den einen Theil $=x$; so ist der andere Theil $=18-x$ und ihr Product $=18x-x^2=90$ oder mit veränderten Zeichen (§. 21).

1	$-18x+x^2=-90$
$1+81=2$	$81-18x+x^2=81-90=-9$
$\sqrt{2}=3$	$-9+x=\pm\sqrt{-9}=\pm3\sqrt{-1}$
$3-9=4$	$x=9\pm3\sqrt{-1}$

Der eine Theil ist also $=9\pm3\sqrt{-1}$ und der andere $=18-9\pm3\sqrt{-1}$. Beyde Werthe sind aber unmöglich (§. 78.), woraus folgt, daß in den Bedingungen der Aufgabe Umstände vorkommen, die sich widersprechen und unmöglich sind. Solche Aufgaben, deren Auflösung auf unmögliche Größen leitet, heißen **unmögliche Aufgaben.**

§. 98.

Achte Aufgabe. **Man soll eine gegebene Zahl in zwey solche Theile theilen, daß das Product**

derselben zu der Summe ihrer Quadrate ein gegebenes Verhältniß hat.

Man nenne die gegebene Zahl $= a$, der größere Theil $= x$ und der kleinere $= a - x$; das Product der Theile ist $= (a - x).x = ax - x^2$, die Summe ihrer Quadrate $= (a - x)^2 + x^2 = a^2 - 2ax + x^2 + x^2 = a^2 - 2ax + 2x^2$. Nach den Bedingungen der Aufgabe soll dies Product zur Summe ein gegebenes Verhältniß haben, welches man $= m : n$ nennen kann; also $ax - x^2 : a^2 - 2ax + 2x^2 = m : n$.

Man multiplicire die äußern und mittlern Glieder

$$anx - nx^2 = a^2m - 2amx + 2mx^2.$$

Man bringe alle Glieder mit x auf Eine Seite

$$-a^2m = -2amx - anx + 2mx^2 + nx^2.$$

Man sammle die Factoren von x und x^2

$$-a^2m = -ax(2m + n) + x^2(2m + n).$$

Man dividire durch $(2m + n)$

$$\frac{-a^2m}{2m+n} = -ax + x^2.$$

Man ergänze das Quadrat dadurch, daß man auf beyden Seiten $\frac{1}{4}a^2 = \frac{a^2}{4}$ addirt

$$\frac{a^2}{4} - \frac{a^2m}{2m+n} = \frac{1}{4}a^2 - ax + x^2.$$

Die beyden Brüche linker Hand bringe man auf gleiche Benennung, indem man jeden Bruch mit dem Nenner

Nenner des andern multiplicirt d. h. $\frac{a^2}{4}$ mit $(2m+n)$ und $\frac{a^2 m}{2m+n}$ mit 4, so ist $\frac{2a^2m + a^2n - 4a^2m}{4(2m+n)} = \frac{1}{4}a^2 - ax + x^2$.

$$\frac{-2a^2m + a^2n}{4(2m+n)} = \frac{1}{4}a^2 - ax + x^2$$

$$\frac{a^2}{4} \cdot \left(\frac{-2m+n}{+2m+n}\right) = \frac{1}{4}a^2 - ax + x^2$$

$$\pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} \cdot \left(\frac{-2m+n}{+2m+n}\right)\right)} = -\frac{1}{2}a + x$$

$$\pm \frac{a}{2} \sqrt{\left(\frac{-2m+n}{+2m+n}\right)} = -\frac{1}{2}a + x$$

$$\frac{a}{2} \pm \frac{a}{2} \sqrt{\left(\frac{-2m+n}{+2m+n}\right)} = x.$$

Es sey $a = 60$, das gegebene Verhältniß $= m : n = 2 : 5$ oder $m = 2$ und $n = 5$, so ist $x = 30 \pm 30 \sqrt{\left(\frac{-4+5}{+4+5}\right)} = 30 \pm 30 \sqrt{\frac{1}{9}} = 30 \pm 30 \cdot \frac{1}{3} = 30 \pm 10$; also x entweder $= 40$ oder $= 20$; der andere Theil $= a - x = 60 - x$ ist entweder $= 20$ oder $= 40$.

§. 99.

Neunte Aufgabe. Es ist die Summe zweyer Zahlen $= a$ und die Summe ihrer Quadrate $= b$ gegeben; man soll die Zahlen selbst finden.

Man nenne die eine Zahl $= x$ und die andere $= y$, so ist vermöge der Bedingung $x + y = a$ und $x^2 + y^2 = b$.

1	$x + y = a$
$1 - y = 2$	$x = a - y$
$2^2 = 3$	$x^2 = a^2 - 2ay + y^2$
Beding. $= 4$	$x^2 + y^2 = b$
$4 - y^2 = 5$	$x^2 = b - y^2$
$3 = 5 = 6$	$a^2 - 2ay + y^2 = b - y^2$
$6 - a^2 = 7$	$-2ay + y^2 = b - a^2 - y^2$
$7 + y^2 = 8$	$-2ay + 2y^2 = b - a^2$
$8:2 = 9$	$-ay + y^2 = \frac{b - a^2}{2}$
$9 + \frac{1}{4}a^2 = 10$	$\frac{1}{4}a^2 - ay + y^2 = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}a^2$
$\sqrt{10} = 11$	$-\frac{1}{2}a + y = \pm\sqrt{(\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}a^2)}$
$11 + \frac{1}{2}a = 12$	$y = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}a^2)}$

Also ist $x = a - y = a - \frac{1}{2}a \mp \sqrt{(\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}a^2)} = \frac{1}{2}a \mp \sqrt{(\frac{1}{2}b - \frac{1}{4}a^2)}$. Es sey z. B. $a = 11$, $b = 73$, so ist $y = \frac{11}{2} \pm \sqrt{(\frac{73}{2} - \frac{121}{4})} = \frac{11}{2} \pm \sqrt{(\frac{146}{4} - \frac{121}{4})} = \frac{11}{2} \pm \sqrt{(\frac{25}{4})} = \frac{11}{2} \pm \frac{5}{2} = \frac{16}{2}$ oder $\frac{6}{2}$; also entweder $= 8$ oder $= 3$ und x entweder $= 3$ oder $= 8$.

§. 100.

Zehnte Aufgabe. Man fragt, was es für zwey Zahlen sind, deren Summe, Product und Differenz ihrer Quadrate unter sich gleich groß sind?

Man

Man nenne die eine Zahl x und die andere y, so ist $x + y = xy = x^2 - y^2$.

1	$x + y = x^2 - y^2 = (x + y).(x - y)$
$1:(x+y) = 2$	$1 = x - y$
$2 + y = 3$	$1 + y = x$
Beding. $= 4$	$x + y = x.y$
Subst. $3 = 5$	$1 + y + y = (1 + y)y$
oder $= 6$	$1 + 2y = y + y^2$
$6 - 2y = 7$	$1 = -2y + y + y^2 = -y + y^2$
$7 + \frac{1}{4} = 8$	$1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - y + y^2$
$\sqrt{8} = 9$	$+\sqrt{(\frac{5}{4})} = \frac{\pm\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{2} + y$
$9 + \frac{1}{2} = 10$	$\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = y.$

Nach der dritten Gleichung ist $1 + y = x$; setzt man nun hierin den gefundenen Werth von y, so hat man

$$1 + \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = x.$$

Es läßt sich beweisen, daß diese gefundenen Werthe von x und y den Bedingungen der Aufgabe genug thun.

1) $x + y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} + \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2}$

$= 2 \pm \sqrt{5}$ (§. 72.).

2) $x.y = (\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}).(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}) = \frac{3 + 4\sqrt{5} + 5}{4}$

(§. 73.) $= \frac{8 \pm 4\sqrt{5}}{4} = 2 \pm \sqrt{5}$.

3) $x^2 - y^2 = (\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2})^2 - (\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2})^2 =$

$\frac{14 \pm 6\sqrt{5}}{4} - \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{4} = \frac{8 \pm 4\sqrt{5}}{4} =$

$2 \pm \sqrt{5}$.

Man sieht, daß die gefundenen Werthe richtig sind, weil ihre Summe, ihr Product und die Differenz ihrer Quadrate gleich groß oder $= 2 \pm \sqrt{5}$ sind.

§. 101.

Eilfte Aufgabe. Man soll zwey Zahlen x und z finden, deren Product der Differenz ihrer Quadrate und die Summe ihrer Quadrate der Differenz ihrer Kubi gleich ist.

Die Auflösung würde schwerer seyn, wenn man gleich z suchen wollte; man nenne die kleinere Zahl = x, welche zu der größern = z ein bestimmtes Verhältniß haben muß, welches man aber noch nicht kennt. Man nenne es 1 : y, also 1 : y = x : z, woraus folgt, daß $xy = z$ ist. Diesen Ausdruck gebrauche man in der Auflösung statt z, so ist vermöge der Bedingung $xz = z^2 - x^2$ oder $x^2 y = x^2 y^2 - x^2$ und $z^2 + x^2 = z^3 - x^3$ oder $x^3 y^3 - x^3 = x^2 y^2 + x^2$.

	1	$x^2 y = x^2 y^2 - x^2$
	2	$x^2 y^2 + x^2 = x^3 y^3 - x^3$
$1 : x^2 =$	3	$y = y^2 - 1$
$3 + 1 =$	4	$y + 1 = y^2$
$4 - y =$	5	$1 = y^2 - y$

$5+\frac{1}{4}=6$	$1+\frac{1}{4}=y^2-y+\frac{1}{4}$
$\sqrt{6}=7$	$\pm\sqrt{\frac{5}{4}}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{5}=y-\frac{1}{2}$
$7+\frac{1}{2}=8$	$\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{5}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}=y$
$2:x^2=9$	$y^2+1=xy^3-x=x(y^3-1)$
$8^2=10$	$y^2=\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{1\pm2\sqrt{5}+5}{4}$
	$=\frac{6\pm2\sqrt{5}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$
$8^3=11$	$y^3=y^2\cdot y=\left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)$
	$=\frac{8\pm4\sqrt{5}}{4}=2\pm\sqrt{5}$
10 und 11 in 9 subst. $=12$	$\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}+1=x(2\pm\sqrt{5}-1)$
oder 13	$\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}=x(1\pm\sqrt{5})$
$13:(1\pm\sqrt{5})=14$	$\left(\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}\right):(1\pm\sqrt{5})=\frac{1}{2}\sqrt{5}=x.$

Die kleinere Zahl x ist also $=\frac{1}{2}\sqrt{5}$ und die größere Zahl $z=xy=\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{5\pm\sqrt{5}}{4}$.

Die Richtigkeit der Auflösung kann man folgendermaaßen prüfen:

1) Das Product $xz=\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\left(\frac{5\pm\sqrt{5}}{4}\right)=\frac{5\pm5\sqrt{5}}{8}$ (§. 73.); der Unterschied der Quadrate z^2-x^2 $=\left(\frac{5\pm\sqrt{5}}{4}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{25\pm10\sqrt{5}+5}{16}$

$$-\frac{5}{4} = \frac{25 \pm 10\sqrt{5} + 5 - 20}{16} = \frac{30 - 20 \pm 10\sqrt{5}}{16}$$

$= \frac{10 \pm 10\sqrt{5}}{16} = \frac{5 \pm 5\sqrt{5}}{8}$; der Unterschied der Quadrate ist also dem Product gleich $= \frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$.

2) Die Summe der Quadrate $= z^2 + x^2 = \frac{25 \pm 10\sqrt{5} + 5}{16} + \frac{5}{4} = \frac{25 \pm 10\sqrt{5} + 5 + 20}{16} = \frac{50 \pm 10\sqrt{5}}{16} = \frac{25 + 5\sqrt{5}}{8}$.

3) Die Differenz der Kubi $z^3 - x^3 = \left(\frac{15 \pm 5\sqrt{5}}{8}\right) \cdot \left(\frac{5 \pm \sqrt{5}}{4}\right) - \frac{5}{4} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{100 \pm 40\sqrt{5}}{32} - \frac{5\sqrt{5}}{8} = \frac{100 \pm 40\sqrt{5} - 20\sqrt{5}}{32} = \frac{100 \pm 20\sqrt{5}}{32} = \frac{25 \pm 5\sqrt{5}}{8}$; woraus erhellet, daß die Summe der Quadrate dem Unterschiede der Kubi gleich ist und daß die gefundenen Zahlen $\frac{\sqrt{5}}{2}$ und $\frac{5 \pm \sqrt{5}}{4}$ den Bedingungen der Aufgabe ein Gnüge leisten.

§. 102.

Zwölfte Aufgabe. Man soll drey Zahlen in einer stetigen geometrischen Proportion finden, $x : y = y : z$, deren Summe $= b$ und die Summe der Quadrate $= c$ ist.

Ver-

Vermöge der Bedingung	1	$x : y = y : z$
	2	$xz = y^2$
	3	$x + y + z = b$
	4	$x^2 + y^2 + z^2 = c$
$3 - y =$	5	$x + z = b - y$
$5^2 =$	6	$x^2 + 2xz + z^2 = b^2 - 2by + y^2$
Subst. 2 $=$	7	$x^2 + 2y^2 + z^2 = b^2 - 2by + y^2$
$7 - y^2 =$	8	$x^2 + y^2 + z^2 = b^2 - 2by$
Subst. 4 $=$	9	$b^2 - 2by = c$
$9 + 2by =$	10	$b^2 = c + 2by$
$10 - c =$	11	$b^2 - c = 2by$
$11 : 2b =$	12	$\frac{b^2 - c}{2b} = y$
$2 . 4 =$	13	$4xz = 4y^2$
$6 - 13 =$	14	$x^2 - 2xz + z^2 = b^2 - 2by - 3y^2$
$\sqrt{14} =$	15	$x - z = \pm\sqrt{(b^2 - 2by - 3y^2)}$
$15 + 5 =$	16	$2x = b - y + \sqrt{(b^2 - 2by - 3y^2)}$
$16 : 2 =$	17	$x = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}y \pm \frac{1}{2}\sqrt{(b^2 - 2by - 3y^2)}$
$5 - 15 =$	18	$2z = b - y + \sqrt{(b^2 - 2by - 3y^2)}$
$18 : 2 =$	19	$z = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}y \mp \frac{1}{2}\sqrt{(b^2 - 2by - 3y^2)}$

Obgleich y in diesen Gleichungen für x und z stehen geblieben ist, so ist doch der Werth von y bestimmt, weil es nach der zwölften Gleichung in bekannten Größen $= \frac{b^2 - c}{2b}$ gefunden ist. Um Raum zu ersparen und die Formeln nicht verwickelter zu machen, hat man y stehen lassen.

Es sey $b = 14$, $c = 84$, so ist $y = \frac{b^2 - c}{2b} = \frac{196 - 84}{28} = 4$; also $x = 7 - 2 \pm \frac{1}{2} \sqrt{(196 - 112 - 48)} = 5 \pm \frac{1}{2} \sqrt{36} = 5 \pm 3$, also entweder $= 8$ oder $= 2$. Ferner $z = 7 - 2 \mp \frac{1}{2} \sqrt{(196 - 112 - 48)} = 5 \mp \frac{1}{2} \sqrt{(36)} = 5 \mp 3$, also z entweder $= 2$ oder 8. Der Werth von y bleibt beständig $= 4$, denn $\sqrt{zx} = y$ oder $\sqrt{xz} = y$ und $y = \sqrt{8 \cdot 2} = \sqrt{2 \cdot 8} = \pm 4$; also sind

die gesuchten Zahlen . .	x,	y,	z.
die ersten Werthe	$+8$,	$+4$,	$+2$.
die zweyten Werthe	$+2$,	-4,	$+8$.

§. 103.

Sieht man $x^2 + a = b$ als die Wurzel an, so ist das Quadrat $= x^4 + 2x^2a + a^2 = b^2$ eine vollständige quadratische Gleichung; gleichfalls $y^6 + 2y^3b + b^2 = c$ und wenn man die Quadratwurzel auszieht $y^3 + b = \pm \sqrt{c}$ und $y^3 = -b + \sqrt{c}$ und endlich $y = \sqrt[3]{(-b + \sqrt{c})}$. Eben so ist $x^{2m} + ax^m + a^2 = b$ eine vollständige quadratische Gleichung, da sie aus der Multiplication der Größen $x^m + a$ mit $x^m + a$ entstanden ist (§. 56.); also $x^m + a = \pm \sqrt{b}$ und $x^m = -a \pm \sqrt{b}$ und $x = \sqrt[m]{(-a \pm \sqrt{b})}$. Im Allgemeinen ersieht man daraus, daß diejenigen Gleichungen, in welchen der eine Exponent

ponent der unbekannten Größe dem doppelten Exponenten der unbekannten Größe im folgenden Gliede gleich ist, quadratische Gleichungen sind. Dies läßt sich also auch auf unvollständige quadratische Gleichungen anwenden. Solche sind $ax^2 + x^4 = d$, $x^4 - 7x^2 = 8$ und $ay^m - y^{2m} = d$ u. s. w. Diese Gleichungen lassen sich auf die gewöhnlichen quadratischen Gleichungen reduciren, wenn man die kleinste Potenz der unbekannten Größe $= z$ setzt, z. B. im vorigen Beyspiel $x^2 = z$, wodurch die Gleichung $ax^2 + x^4 = d$ die Gleichung $az + z^2 = b$ wird, welche sich nach den vorhin (§. 93.) gegebenen Regeln auflösen läßt.

Erstes Beyspiel.

1	$2x^2 + x^4 = 99$
$x^2 = z = 2$	$2z + z^2 = 99$
$2 + 1 = 3$	$1 + 2z + z^2 = 99 + 1 = 100$
$\sqrt{3} = 4$	$1 + z = \pm\sqrt{100} = \pm 10$
$4 - 1 = 5$	$z = \pm 10 - 1$
$x^2 = z = 6$	$x^2 = \pm 10 - 1$
$\sqrt{6} = 7$	$x = \pm\sqrt{(\pm 10 - 1)}$.

Also ist $x = \pm\sqrt{9}$ oder $+ 3$ oder $x = \pm\sqrt{-11}$, welche beyden letzten Werthe unmöglich sind (§. 78.).

Zwey-

Zweytes Beyspiel.

1	$-3x^3 + x^6 = 40$
2	$-x^3 = z$
Subst. 2 in 1 = 3	$-3z + z^2 = 40$
$3 + \frac{9}{4} = 4$	$\frac{9}{4} - 3z + z^2 = 40 + \frac{9}{4} = \frac{169}{4}$
$\sqrt{4} = 5$	$-\frac{3}{2} + z = \pm\sqrt{(\frac{169}{4})} = \pm\frac{13}{2}$
$5 + \frac{3}{2} = 6$	$z = \pm\frac{13}{2} + \frac{3}{2}$
Subst. 2 in 6 = 7	$x^3 = \frac{\pm 13 + 3}{2}$
$\sqrt[3]{7} = 8$	$x = \pm\sqrt[3]{\left(\frac{\pm 13 + 3}{2}\right)}$

Also ist $x = \pm\sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \pm\sqrt[3]{8} = \pm 2$ oder $x = \pm\sqrt{(-\frac{10}{2})} = \pm\sqrt{-5}$, welche Werthe aber unmöglich sind.

Drittes Beyspiel.

1	$m x^n + x^{2n} = b$
2	$x^n = z$
Subst. 2 in 1 = 3	$mz + z^2 = b$
$3 + \frac{1}{4}m^2 = 4$	$\frac{1}{4}m^2 + mz + z^2 = b + \frac{1}{4}m^2$
$\sqrt{4} = 5$	$\frac{1}{2}m + z = \pm\sqrt{(b + \frac{1}{4}m^2)}$
$5 - \frac{1}{2}m = 6$	$z = -\frac{1}{2}m \pm \sqrt{(b + \frac{1}{4}m^2)}$
Subst. 2 in 6 = 7	$x^n = -\frac{1}{2}m \pm \sqrt{(b + \frac{1}{2}m^2)}$
$\sqrt[n]{7} = 8$	$x = \sqrt[n]{((-\frac{1}{2}m \pm \sqrt{(b + \frac{1}{4}m^2)})}$.

§. 104.

Dreyzehnte Aufgabe. Es ist das Product zweyer Zahlen = 16 und die Differenz ihrer Kubi

Kubi = 504 gegeben; man soll die Zahlen selbst finden.

Man nenne die größere Zahl = x und die kleinere = y, so ist:

1	$xy = 16$
2	$x^3 - y^3 = 504$
$1 : y = 3$	$x = \frac{16}{y}$
$3^3 = 4$	$x^3 = \frac{4096}{y^3}$
$2 + y^3 = 5$	$x^3 = 504 + y^3$
$4 = 5 = 6$	$504 + y^3 = \frac{4096}{y^3}$
$6 \cdot y^3 = 7$	$504\,y^3 + y^6 = 4096$
$7 + (\frac{504}{2})^2 = 8$	$63504 + 504\,y^3 + y^6 = 4096 + 63504 = 67600$
$\sqrt{8} = 9$	$252 + y^3 = \pm\sqrt{67600} = \pm 260$
$9 - 252 = 10$	$y^3 = \pm 260 - 252 = +8$ oder $= -512$
$\sqrt[3]{10} = 11$	$y = +2$ oder $= -8$.

Da vermöge der dritten Gleichung $x = \frac{16}{y}$ ist, so ist $x = \frac{16}{+2}$ oder $= \frac{16}{-8}$ oder $= +8$ oder $= -2$.

§. 105.

Vierzehnte Aufgabe. Es ist das Product zweyer Zahlen = p und die Summe ihrer Quadrate = s gegeben; man soll die Zahlen selbst finden. Die

Die größere sey $= x$, die kleinere $= y$, so ist

1	$xy = p$
2	$x^2 + y^2 = s$
3	$x = \frac{p}{y}$
$3^2 = 4$	$x^2 = \frac{p^2}{y^2}$
$2 - y^2 = 5$	$x^2 = s - y^2$
$4 = 5 = 6$	$s - y^2 = \frac{p^2}{y^2}$
$6 . y^2 = 7$	$sy^2 - y^4 = p^2$
8	$-sy^2 + y^4 = -p^2$
$8 + \frac{1}{4}s^2 = 9$	$\frac{1}{4}s^2 - sy^2 + y^4 = -p^2 + \frac{1}{4}s^2$
$\sqrt{9} = 10$	$\frac{1}{2}s + y^2 = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}s^2 - p^2)}$
$10 - \frac{1}{2}s = 11$	$y^2 = \frac{1}{2}s \pm \sqrt{(\frac{1}{4}s^2 - p^2)}$
$\sqrt{11} = 12$	$y = \pm\sqrt{(\frac{1}{2}s \pm \sqrt{(\frac{1}{4}s^2 - p^2)})}$.

Da nun vermöge der dritten Gleichung $x = \frac{p}{y}$ ist, so ist

$$x = \frac{p}{\pm\sqrt{(\frac{1}{2}s \pm \sqrt{(\frac{1}{4}s^2 - p^2)})}}.$$

Z. B. Es sey $p = 24$ und $s = 52$, so ist $y = \pm\sqrt{(26 \pm \sqrt{(676 - 576)}} = \pm\sqrt{(26 \pm \sqrt{100})} = +\sqrt{(26 \pm 10)} = \pm\sqrt{36}$ oder $= \pm\sqrt{16}$; also y entweder $= \pm 6$ oder $= \pm 4$; gleichfalls wird man finden, daß x entweder $= \pm 4$ oder $= \pm 6$ ist.

Sechs-

Sechstes Kapitel.

Auflösung der Gleichungen durch Logarithmen.

§. 106.

Bey der Auflösung algebraischer Aufgaben kommt man zuweilen auf Gleichungen, in denen sich die unbekannte Größe als Exponent befindet; z. B. $s^x = 100$ oder $a^x = b$. Die bis jetzt erklärte Methode ist zur Auflösung solcher Gleichungen nicht hinlänglich. Die Logarithmen geben uns das einzige Mittel an die Hand, wodurch man solche Gleichungen auflösen kann. Obgleich die Lehre von den Logarithmen in der Arithmetik (§. 108 — §. 126) synthetisch abgehandelt ist, so wird es doch nicht überflüßig seyn, sie hier analytisch vorzutragen.

§. 107.

Wenn man folgende wachsende geometrische Progression hat, welche mit 1 oder a^0 anfängt (§ 59):

in Buchstaben - $a^0 . a^1 . a^2 . a^3 . a^4 . a^5 . a^6 .$

in Zahlen - - $1 . 10^1 . 10^2 . 10^3 . 10^4 . 10^5 . 10^6 .$

so ist das Verhältniß $1 : a^2$ oder $1 : 10^2$ zweymal aus den Verhältnissen $1 : a$ oder $1 : 10$; das Verhältniß $1 : a^3$ oder $1 : 10^3$ dreymal, das Verhältniß $1 : a^4$ oder $1 : 10^4$ viermal aus den Verhältnissen $1 : a$ oder $1 : 10$ zusammengesetzt (§. 93. Arith.). Die Anzahl

der

der Zusammensetzungen ist der Logarithme (§. 110. Arith.); aber die Zahl der Zusammensetzung ist zugleich der Exponent der Potenz, wenn man also eine wachsende geometrische Progression der Größe a hat, welche mit a^0 oder 1 anfängt, so sind die Exponenten die Logarithmen der Potenzen.

Potenzen	a^0.	a^1.	a^2.	a^3.	a^4.	a^5.	a^6.
Logarithmen	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.

Wenn man in allgemeinen Zeichen $a^m = b$, $a^n = c$, $a^p = d$, $a^q = e$, $a^r = f$ setzt, so ist $m =$ log. b, $n =$ log. c, $p =$ log. d, $q =$ log. e, $r =$ log. f.

Potenzen	a^m	a^n	a^p	a^q	a^r
Logarithmen	m	n	p	q	r.

§. 108.

Der Logarithme eines Products b f ist so groß, als die Summe der Logarithmen der Factoren b und f; d. h. Log. (b. f.) = Log. b + Log. f und der Logarithme des Quotienten $\frac{f}{b}$ ist der Differenz der Logarithmen des Dividendus und Divisors gleich, oder Log. $\left(\frac{f}{b}\right)$ = Log. f. — Log. b.

1) Nach der Bezeichnung im vorigen §. ist $b = a^m$ und $f = a^r$; diese mit einander multiplicirt, geben

b f

$bf = a^m . a^r = a^{m+r}$ (§. 56) und wenn man Logarithmen nimmt: Log. $(bf) =$ Log. (a^{m+r}). Weil aber die Exponenten die Logarithmen der Potenzen sind (§. 107.), so ist Log. $(a^{m+r}) = m + r$; also ist auch Log. $(bf) = m + r$. Aber Log. $b = m$ und Log. $f = r$ (§. 107.); also Log. $(bf) =$ Log. $b +$ Log. f.

2) Da $f = a^r$ und $b = a^m$, so ist $\frac{f}{b} = \frac{a^r}{a^m} = a^{r-m}$ (§. 57.); also Log. $(\frac{f}{b}) =$ Log. $a^{r-m} = r - m$ (§. 107.); aber $r =$ Log. f und $m =$ Log. b (§. 107.); also Log. $(\frac{f}{b}) =$ Log. $f -$ Log. b.

§. 109.

Man findet den Logarithmen einer Potenz b^x, wenn man den Logarithmen der Wurzel b mit dem Exponenten der Potenz x multiplicirt, d. h. Log. $b^x = x$. Log. b und den Logarithmen einer Wurzel $\sqrt[x]{b}$, wenn man den Logarithmen der Größe b durch den Exponenten der Wurzel x dividirt oder Log. $\sqrt[x]{b} = \frac{\text{Log. } b}{x} = \frac{1}{x}$. Log. b.

1) $a^m = b$ und wenn man beyde zur Potenz x erhebt, ist $(a^m)^x = a^{mx}$ (§. 61.) $= b^x$; aber der Logarithme der Potenz a^{mx} ist der Exponent mx (§. 107.) oder Log. $a^{mx} = mx$, also $mx =$ Log.

 b^x;

b^x; aber $m = \text{log.}\ b$; daher $x \cdot \text{log.}\ b = \text{log.}\ b^x$. So ist $\text{log.}\ a^4 = 4 \cdot \text{log.}\ a$ und $\text{log.}\ a^7 = 7\ \text{log.}\ a$ und $\text{log.}\ a^n = n\ \text{log.}\ a$.

2) $a^m = b$; hieraus ziehe man die Wurzel x, so ist $\sqrt[x]{a^m} = a^{\frac{m}{x}}$ (§. 65.) $= \sqrt[x]{b}$; nun ist aber der Exponent $\frac{m}{x}$ der Logarithme von $a^{\frac{m}{x}}$; also ist er auch der Logarithme der gleich großen Wurzelgröße $\sqrt[x]{b}$ oder $\frac{m}{x} = \text{log.}\ \sqrt[x]{b}$; aber $m = \text{log.}\ b$ (§. 107.); also $\frac{\text{log.}\ b}{x} = \frac{1}{x}\ \text{log.}\ b = \text{log.}\ \sqrt[x]{b}$. So ist $\sqrt[3]{a} = \frac{1}{3}\ \text{log.}\ a$ und $\text{log.}\ \sqrt[5]{a^3} = \frac{3}{5}\ \text{log.}\ a$ und $\text{log.}\ \sqrt[4]{a} = \frac{1}{4}\ \text{log.}\ a$.

§. 110.

Es wird nicht überflüßig seyn, die Anwendung der Logarithmen durch mehrere Beyspiele zu erläutern.

$$\text{log.}\left(\frac{ab}{c}\right) = \text{log.}\ a + \text{log.}\ b - \text{log.}\ c.$$

$$\text{log.}\left(\frac{abc}{de}\right) = \text{log.}\ a + \text{log.}\ b + \text{log.}\ c - \text{log.}\ d - \text{log.}\ e.$$

$$\text{log.}\ (a^m b^n c^r) = m\ \text{log.}\ a + n\ \text{log.}\ b + r\ \text{log.}\ c.$$

$$\text{log.}\left(\frac{a x^n}{b^m}\right) = \text{log.}\ a + n\ \text{log.}\ x - m\ \text{log.}\ b.$$

$$\text{log.}\left(\frac{ac - c}{m}\right) = \text{log.}\left(\frac{(a-1)c}{m}\right) = \text{log.}\ (a-1) + \text{log.}\ c - \text{log.}\ m.$$

$\log.\left(\frac{ab+bc}{m+n}\right)=\log.\left(\frac{(a+c)\,b}{m+n}\right)=\log.(a+c)$
$+\log.b-\log.(m+n).$

$\log.\sqrt{(x^2+y^2)}=\frac{1}{2}\log.(x^2+y^2).$

$\log\left(\frac{a+x}{a-x}\right)=\log.(a+x)-\log.(a-x).$

$\log.(a^2-x^2)=\log.(a+x).(a-x)=\log.$
$(a+x)+\log.(a-x).$

$\log.\sqrt[n]{(a^3-x^3)^m}=\log.\sqrt[n]{((a-x).(a^2-}$
$2ax+x^2))^m=\frac{m}{n}\log.(a-x)+\frac{m}{n}\log.(a^2-$
$2ax+x^2).$

$\log.\frac{\sqrt{(a-x)}}{\sqrt{(a+x)^3}}=\frac{1}{2}\log.(a-x)-\frac{3}{2}\log.(a+x).$

§. 111.

Wenn man eine Gleichung auflösen soll, in der x als ein Exponent vorkommt, so drückt man die Gleichung durch Logarithmen aus (§ 108. 109) und behandelt dieselbe dann nach den gewöhnlichen Regeln (§. 21-24.), so daß man bloß x auf der einen und lauter bekannte Größen auf der andern Seite hat.

Erstes Beyspiel:

1	$5^x=100$
$\log. 1=2$	$x.\log.5=\log 100=2$
$2:\log.5=3$	$x=\frac{2}{\log.5}=\frac{2}{0,698970}$
	$x=0,286\ldots.$

Zweytes Beyspiel.

1	$c^x = ab^{x-1}$
log. 1 = 2	$x \log. c = \log a + (x-1) \log. b$
2 − x log. b = 3	$x \log. c - x \log. b = \log. a - \log. b$
3 : (log. c − l. b) = 4	$x = \frac{\text{Log. } a - \text{Log. } b}{\text{Log. } c - \text{Log. } b.}$

Auch solche Gleichungen, in denen x nicht allein als Exponent sondern auch als Wurzel vorkommt, kann man auflösen, wenn zwey Gleichungen gegeben sind, z. B.

1	$x^x = a$
2	$x^{x+p} = b$
log. 1 = 3	$x \log. x = \log. a$
3 : x = 4	$\log. x = \frac{\text{Log. } a}{x}$
log 2 = 5	$(x+p) \log. x = \log. b$
Subst. 4 = 6	$(x+p) \frac{\text{Log. } a}{x} = \log. b$
6 . x = 7	$(x+p) \log. a = x \log. b$ oder $x. \log. a + p \log. a = x \log. b$
7 − x log. a = 8	$p. \log. a = x \log. b - x \log. a = x (\log. b - \log. a)$
8 : (Log. b − Lg. a) = 9	$\frac{p \text{ Log. } a}{\text{Log. } b - \text{Log. } a} = x$

§. 112.

Erste Aufgabe. Es ist die Volksmenge eines Landes = a nebst dem jährlichen Zuwachs derselben

selben $= \frac{1}{m}$ gegeben; man soll finden, wie groß die Volksmenge $= x$ nach einer gewissen Anzahl von Jahren $= n$ ist.

Da die Volksmenge im Anfange $= a$ und der Zuwachs im ersten Jahre $= \frac{a}{m}$ ist, so ist derselbe am Schluß des ersten Jahres $= a + \frac{a}{m} = \frac{am + a}{m} = \left(\frac{m+1}{m}\right) . a.$

Im zweyten Jahre wächset sie hievon den $\frac{1}{m}$ Theil, und der Zuwachs ist $= \left(\frac{m+1}{m^2}\right) . a$, und die ganze Volksmenge am Schluß des zweyten Jahres ist $= \left(\frac{m+1}{m}\right) a + \left(\frac{m+1}{m^2}\right) a.$

Diese Brüche bringe man auf gleiche Benennung, und addire sie, so ist die Volksmenge am Schluß des zweyten Jahres $= \left(\frac{m^2 + m + m + 1}{m^2}\right) a = \left(\frac{m^2 + 2m + 1}{m^2}\right) a = \left(\frac{m+1}{m}\right)^2 a.$ Der Zuwachs im dritten Jahr ist hievon der mte Theil $= \left(\frac{m^2+2m+1}{m^3}\right)$ a, und die ganze Volksmenge am Schluß des dritten Jahres $= \left(\left(\frac{m^2+2m+1}{m^2}\right) + \left(\frac{m^2+2m+1}{m^3}\right)\right) a$ $= \left(\frac{m^3 + 2m^2 + m + m^2 + 2m + 1}{m^3}\right) a = \left(\frac{m^3+3m^2+3m+1}{m^3}\right) a = \left(\frac{m+1}{m}\right)^3 a.$

 Eben

Eben so wird man die Volksmenge am Schluß des vierten Jahrs $= \left(\frac{m+1}{m}\right)^4 a$; am Schluß des fünften Jahrs $= \left(\frac{m+1}{m}\right)^5 a$, und am Schluß des nten Jahrs $= \left(\frac{m+1}{m}\right)^n a$ finden; also $\left(\frac{m+1}{m}\right)^n a = x$.

Es sey z. B. die Volksmenge $a = 10000$, der jährliche Zuwachs $= \frac{1}{50} = \frac{1}{m}$ oder $m = 50$. Man sucht die Volksmenge nach Verlauf von 100 Jahren $= n$.

$$\left(\tfrac{51}{50}\right)^{100} \cdot 10000 = x.$$

Man brauche nun die Logarithmen:

$$100 \log. 51 - 100 \log. 50 + \log. 10000 = \log. x.$$

$$100 \log. 51 = 170,75701761$$
$$100 \log. 50 = 169,89700043$$
$$0,86001718$$
$$\log. 10000 = 4,00000000$$
$$\log. x = 4,86001718$$
$$x = 72446$$

§. 113.

Zweyte Aufgabe. Es ist die anfängliche Volksmenge $= a$ und die Volksmenge $= b$ nach einer gewissen Anzahl von Jahren $= n$ gegeben; man soll

soll den Nenner des jährlichen Zuwachses der Volksmenge $= x$ finden.

Man sieht leicht, daß die Auflösung auf dieselbe Weise, wie bey der vorigen Aufgabe 1 geschehen kann. Man kann also die vorhin gefundene Formel $x = \left(\frac{m+1}{m}\right)^n a$ gebrauchen, nur mit dem Unterschiede, daß x jetzt b und m jetzt x ist; also

1	$b = \left(\frac{x+1}{x}\right)^n a$
$1 : a = 2$	$\frac{b}{a} = \left(\frac{x+1}{x}\right)^n$
$\sqrt[n]{2} = 3$	$\sqrt[n]{\frac{b}{a}} = \frac{x+1}{x}$
$3 . x = 4$	$x \sqrt[n]{\frac{b}{a}} = x + 1$
$4 - x = 5$	$x \sqrt[n]{\frac{b}{a}} - x = 1 = x\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\right)$
6	$x = \frac{1}{\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\right)}.$

Es sey z. B. die anfängliche Volksmenge $= a = 10000$; die Volksmenge nach einer gewissen Anzahl von Jahren $= b = 72446$; die verflossenen Jahre $= 100 = n$; man sucht den jährlichen Zuwachs $= x$,

so ist $x = \frac{1}{\sqrt[100]{\left(\frac{72446}{10000}\right)} - 1}.$

Durch Hülfe der Logarithmen suche man die hun-

dertste Wurzel von $\frac{72446}{10000}$; nämlich Log. $\sqrt[100]{\frac{72446}{10000}}$

$= \frac{\text{Log. } 72446}{100} - \frac{\text{Log. } 10000}{100}$; also

$$\frac{\text{Log. } 72446}{100} = \frac{4,8600172}{100} = 0,048600172$$

$$\frac{\text{Log. } 10000}{100} = \frac{4,0000000}{100} = 0,040000000$$

$$\text{Log. } \sqrt[100]{\left(\frac{72446}{10000}\right)} = 0,008600172.$$

Zu diesem Logarithmen gehört die Zahl 1,020; also x

$$= \frac{1}{\sqrt[100]{\left(\frac{72446}{10000}\right)} - 1} = \frac{1}{1,0201 - 1} = \frac{1}{0,020} = 50.$$

Der jährliche Zuwachs der Volksmenge ist also $= \frac{1}{50}$.

§. 114.

Dritte Aufgabe. Eine gegebene Volksmenge $= a$ wächset jährlich $\frac{1}{m}$ und ist dadurch zu einer Volksmenge $= b$ gestiegen; man fragt nach den verflossenen Jahren $= x$.

Die §. 112. gefundene Formel $\left(\frac{m+1}{m}\right)^n a = x$ läßt sich auch hier gebrauchen. Nach den in dieser Aufgabe vorkommenden Benennungen ist $x = b$ und $n = x$ und setzt man diese Werthe in obige Gleichung, so ist $\left(\frac{m+1}{m}\right)^x . a = b$ die Gleichung, durch die sich gegenwärtige Aufgabe auflösen läßt.

$$1 \Big| \left(\frac{m+1}{m}\right)^x a = b$$

$$1 : a = 2 \Big| \left(\frac{m+1}{m}\right)^x = \frac{b}{a}$$

$$\text{Log. } 2 = 3 \Big| x \,\text{Log.}(m+1) - x \,\text{Log } m = \text{Log } b - \text{Log. } a = x\,(\text{Log }(m+1) - \text{Log. } m) = \text{Log. } b - \text{Log. } a$$

$$4 \Big| x = \frac{\text{Log. } b - \text{Log. } a}{\text{Log.}(m+1) - \text{Log. } m.}$$

Es sey z. B. die gegebene Volksmenge $a = 20000$; sie wächset jährlich $\frac{1}{100}$ und nach x Jahren ist sie zum Zehnfachen $= b = 10a = 200000$ gestiegen, so ist

$$x = \frac{\text{Log. } 200000 - \text{Log. } 20000}{\text{Log. } 101 - \text{Log. } 100}$$

$$\begin{array}{r} \text{Log. } 200000 = 5{,}3010300 \\ \text{Log. } 20000 = 4{,}3010300 \\ \hline \text{Log. } 200000 - \text{Log } 20000 = 1{,}0000000. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Ferner Log. } 101 = 2{,}0043214 \\ \text{Log. } 100 = 2{,}0000000 \\ \hline \text{Log. } 101 - \text{Log. } 100 = 0{,}0043214, \end{array}$$

$$\text{also } x = \frac{1{,}0000000}{0{,}0043214} = 231{,}4 \text{ Jahre.}$$

§. 115.

Auch kann man sich mit Vortheil der Logarithmen zu Zinsrechnungen bedienen. Unter Zinsen versteht man die Einnahme, die der Eigenthümer von seinen

an andere ausgeliehenen Kapitalien oder Geldern ziehet. Diese werden entweder durch Landesgesetze oder durch freywillige Uebereinkunft bestimmt und gewöhnlich nach der jährlichen Einnahme von 100 ℛ𝔱 oder Procenten oder ein Gewisses von Hundert berechnet. Wenn man z. B. 100 ℛ𝔱 ausgeliehen hat und dafür jährlich 4, 5 oder 6 ℛ𝔱 einnimmt, so sagt man, das Kapital sey zu 4, 5 oder 6 Procent ausgeliehen. Die Menge der Procente bestimmt den Zinsfuß, der sich am kürzesten durch die jährliche Zinse von 100 ℛ𝔱 ausdrücken läßt. Bey 4 Procent ist der Zinsfuß $= 0,04$; denn 100 ℛ𝔱 geben 4 ℛ𝔱, was gibt 1 ℛ𝔱? Man wird $x = \frac{4}{100}$ (§. 98. Arith.) $= 0,04$ (§. 47. Arith.) finden. Wenn man im allgemeinen die jährliche Zinse von 1 ℛ𝔱 oder den Zinsfuß $= m$ setzt, so ist

bey 4 Procent $m = 0,04$
5 „ „ $m = 0,05$
6 „ „ $m = 0,06$
7 „ „ $m = 0,07$.

§. 116.

Vierte Aufgabe. **Es ist ein Kapital $= k$, die Zeit $= t$ und der Zinsfuß $= m$ gegeben; man soll finden, wie viel Zinsen $= r$ das Kapital in der gegebenen Zeit einbringt.**

Man ersieht leicht, daß diese Aufgabe zur directen zusammengesetzten Regula Detri (§. 103. Arith.) gehört

hört und daß die Auflösung derselben in zwey Proportionen zerfällt. 1) 1 Rthl. gibt in Einem Jahre m Zinse, was gibt das gegebene Kapital = k in Einem Jahre? 2) In Einem Jahre gibt das Kapital k die gefundene Zinse = x, was gibt dasselbe in t Jahren? Der Ansatz ist folgender:

$$1 : m = k : x$$
$$1 : t = x : r$$
$$\overline{1 : mt = k : r} \text{ (§. 91. Arith.)}$$
$$kmt = r \text{ (§. 78. Arith.)}.$$

Z. B. Wie viel beträgt die Zinse von 22000 Rthl. in $2\frac{1}{2}$ Jahren zu 5 Procent, also k = 22000, t = 2,5 und m = 0,05; also die gesuchte Zinse r = 22000 . 2,5 . 0,05 = 2750 Rthl.

§. 117.

In der Gleichung kmt = r haben wir k, m, t als die gegebenen Stücke angenommen; aber man kann von den vier Größen k, m, t, r beliebig drey als bekannt annehmen und daraus die vierte finden, woraus folgende drey leichte Aufgaben entstehen.

	gegebene Stücke,	gesuchte Größe und die endliche Gleichung.
1.	m, k, r	$t = \frac{r}{mk}$
2.	k, r, t	$m = \frac{r}{kt}$
3.	t, m, r	$k = \frac{r}{mt}$

Bey-

Beyspiel zu Nr. 1. Wie viele Jahre werden verstreichen, bis die Zinse von 2000 ℛ︀ℰ zu 4000 ℛ︀ℰ angewachsen ist, wenn diese Zinse 5 Procent beträgt? Es ist also $t = \frac{r}{mk}$ und $k = 2000$, $r = 4000$, $m = 0{,}05$ (§. 115.); also $t = \frac{4000}{0{,}05 . 2000} = \frac{4000}{100} =$ 40 Jahr.

Beyspiel zu Nr. 2. Von 5000 ℛ︀ℰ ist für 4 Jahre die Zinse mit 1250 ℛ︀ℰ bezahlt worden; es wird gefragt, wie der Zinsfuß gewesen ist? Es ist $k = 5000$, $r = 1250$, $t = 4$ und $m = \frac{r}{kt} = \frac{1250}{5000 . 4} = \frac{1250}{20000} = 0{,}0625$ oder die Zinsen von 1 ℛ︀ℰ in Einem Jahre ist $= 0{,}0625$, von 100 also hundertmal so groß $= 6{,}25$ oder $6\frac{1}{4}$ Procent gewesen.

Beyspiel zu Nr. 3. Bey einem Zinsfuß von 8 Procent nahm man von einem gewissen Kapital in 5 Jahren zusammen 6000 ℛ︀ℰ ein; es wird gefragt, wie groß das Kapital gewesen ist? Hier ist $m = 0{,}08$, $r = 6000$, $t = 5$ und $k = \frac{r}{mt} = \frac{6000}{0{,}08 \cdot 5} = \frac{6000}{0{,}04} = 15000$ ℛ︀ℰ.

§. 118.

Wenn die Zinse eines gegebenen Kapitals in einer gegebenen Zeit zum Kapital gelegt wird, so nennt man diese Summe **Kapital und Zinse**, welches wir künftig mit k' bezeichnen werden. Wenn wie vorhin das Kapital $= k$, der Zinsfuß $= m$, die Zeit $= t$ und die

die Zinse $= r$ ist, so hat man $r = kmt$ (§. 116.) und Kapital und Zinse $= k' = r + k = kmt + k = (mt + 1) k$. Z. B. 2500 ℛ werden auf $2\frac{1}{4}$ Jahr zu 4 Procent ausgethan, wie groß ist nach $2\frac{1}{4}$ Jahren Kapital und Zinse? Hier ist $k = 2500$, $m = 0{,}04$, $t = 2\frac{1}{4} = 2{,}25$ und $k' = (mt + 1) k = (0{,}04 \cdot 2{,}25 + 1) \cdot 2500 = (0{,}09 + 1) \cdot 2500 = 1{,}09 \cdot 2500 = 2725$ ℛ.

§. 119.

Aus der Formel $k' = kmt + k$ lassen sich folgende Aufgaben herleiten:

	Bekannt	Unbekannt und letzte Gleichung
1.	k . k′ . t.	$m = \frac{k' - k}{kt}$
2.	k . k′ . m.	$t = \frac{k' - k}{km}$
3.	k′ . m . t.	$k = \frac{k'}{mt + 1}$

Beyspiel zu Nr. 1. 1000 ℛ sind in 5 Jahren mit Kapital und Zinsen 2250 ℛ geworden; man fragt nach dem Zinsfuß oder wie viele Procente jährlich bezahlt worden sind? $k = 1000$, $k' = 2250$, $t = 5$, so ist $m = \frac{k' - k}{kt} = \frac{2250 - 1000}{1000 \cdot 5} = \frac{1250}{5000} = 0{,}25$, d. h. von Einem ℛ ist jährlich $\frac{1}{4}$ ℛ und von 100 ℛ jährlich der vierte Theil $= 25$ ℛ bezahlt.

Bey-

Beyspiel zu Nr. 2. Ein Kapital von 6000 Rthlr. ist mit Kapital und Renten zu 8500 Rthlr. bey 4 Procent Zinsen angewachsen; man fragt, wie lange Zeit das Kapital ausgestanden hat? $k = 6000$, $k' = 8500$, $m = 0{,}04$ und $t = \frac{k' - k}{mk} = \frac{8500 - 6000}{0{,}04 \cdot 6000} = \frac{2500}{240} = 10\frac{100}{240}$ Jahr oder 10 Jahre 152 Tage 2 Stunden.

Beyspiel zu Nr. 3. Ein gewisses Kapital ist $3\frac{1}{2}$ Jahr zu 5 Procent ausgeliehen gewesen und macht jetzt nebst den Zinsen 5330 Rthlr. aus; wie groß ist das Kapital gewesen? $k' = 5330$, $m = 0{,}05$, $t = 3{,}5$; so ist $k = \frac{k'}{mt + 1} = \frac{5330}{0{,}05 \cdot 3{,}5 + 1} = \frac{5330}{0{,}175 + 1} = \frac{5330}{1{,}175} = 4536\frac{200}{1175}$ Rthlr. oder 4536 Rthlr. 8 ß.

§. 120.

So lange die Zinse eines gegebenen Kapitals geradezu in Verhältniß der Zeit wächset (§. 115-119.) ohne irgend eine weitere Zugabe, so nennt man dies die **einfache Zinse**; wird aber die jährliche Zinse zum Kapital geschlagen und nicht allein vom Kapital, sondern auch von der hinzugekommenen Zinse in der folgenden Zeit Zinse bezahlt, so nennt man das **Zinse auf Zinsen** (usura composita). Es sey ein Kapital von 1000 Rthlr. gegeben und die jährliche Zinse 5 Procent, so muß man dasselbe mit Zinsen und Zinsen auf Zinsen für 4 Jahre folgendermaaßen berechnen:

Erstes

Erstes Kapital	1000 Rthl.
Zinse für das erste Jahr . .	50 .
Kapital und Zinse nach dem 1sten Jahre	1050
Zinse für das 2te Jahr	52,5
Kap. und Zinse auf Zins. nach dem 2n J.	1102,5
Zinse für das 3te Jahr	55,125
nach dem 3ten Jahre	1157,625
Zinse für das 4te Jahr	57,881
nach dem vierten Jahre	1215,506 Rthl.

§. 121.

Wenn das Hauptkapital $= 1$ Rthl. und der Zinsfuß $= m$ ist, so ist Kapital und Zinse nach Einem Jahre $= 1 + m$ und Kapital und Zinse und Zinse auf Zinsen werden in folgender geometrischen Progression der Potenzen von $(1+m)$ zunehmen, nämlich: $(1+m)$, $(1+m)^2$, $(1+m)^3$, $(1+m)^4$, $(1+m)^5$ u. s. w.

Hauptkapital $= 1$
Zinsfuß $= m$ (§. 115.)

Kap. u. Zinse n. d. 1n J. $= 1 + m \qquad = 1 + m$
jährliche Zinse $= m + m^2$

nach dem 2n Jahre $= 1 + 2m + m^2 = (1+m)^2$
jährliche Zinse $= m + 2m^2 + m^3$

nach dem 3n Jahre $= 1 + 3m + 3m^2 + m^3 = (1+m)^3$

jähr.

jährliche Zinse $= m + 3m^2 + 3m^3 + m^4$

n. d. 4n Jahr $= 1 + 4m + 6m^2 + 4m^3 + m^4 = (1+m)^4$

nach t Jahren $= \quad = \quad (1+m)^t$.

§. 122.

Auf eben die Art läßt es sich beweisen, daß wenn das Hauptkapital $= k$ ist, dies Kapital mit Zinsen und Zinsen auf Zinsen nach Verlauf von t Jahren oder $k'' = (1 + m)^t . k$ wird oder in Logarithmen ausgedrückt: $\log. k'' = t . \log. (1 + m) + \log. k$ (§. 107. 108.). Hieraus ergeben sich folgende vier Aufgaben:

	Gegeben	Gesucht in Logarithmen
1.	m . t . k.	$\log k'' = t . \log. (1 + m) + \log. k$
2.	m . t . k''.	$\log. k = \log. k'' - t \log. (1 + m)$
3.	m . k . k''.	$t = \frac{\log. k'' - \log. k}{\log. (1 + m)}$
4.	k . k'' . t.	$\log. (1 + m) = \frac{\log. k'' - \log. k}{t}$

Beyspiel zu Nr. 1. Wie groß wird ein Kapital von 1000 Reichsthaler mit Zinsen auf Zinsen zu $5\frac{1}{2}$ Procent in 100 Jahren? Hier ist $k = 1000$, $t = 100$, $m = 0{,}055$ und $1 + m = 1{,}055$; also

$$\log. (1 + m) = \log. 1{,}055 = 0{,}023252524596$$

$$t . \log. (1 + m) = 100 \log. 1{,}055 = 2{,}3252524596$$

$$\log. k = \log. 1000 = 3{,}0000000000$$

$$t . \log. (1 + m) + \log. k = \log. k'' = 5{,}3252524596,$$

wozu die Zahl 211471,74 Rthlr. gehört.

Bey-

Beyspiel zu Nr. 2. Wenn ein Kapital nebst Zinsen und Zinsen auf Zinsen zu 5 Procent in zwölf Jahren zu 18320 Reichsthaler angelaufen ist, wie groß ist denn das Hauptkapital gewesen? Hier ist $1+m=1{,}05$, $k''=18320$, $t=12$.

$$\log.(1+m)=\log.\,1{,}05=0{,}021189299$$

$$t.\log.(1+m)=12\,\log.\,1{,}05=0{,}2542716$$
$$\log.\,k''=\log.\,18320=4{,}2629255$$

$$\log.\,k''-t.\log.(1+m)=\log.\,k=4{,}0086539,$$

also ist das erste ausgeliehene Kapital $k=10201{,}26$ ℛ︀ oder 10201 ℛ︀ 12½ ß.

Beyspiel zu Nr. 3. In wie langer Zeit wird ein Kapital von 1282 ℛ︀ 12 ß, zu 5 Procent ausgeliehen, zu 1804 ℛ︀ 12 ß anwachsen? Hier ist $k''=1804{,}25$, $k=1282{,}25$ und $1+m=1{,}05$.

$$\log.\,k''=3{,}2562968$$
$$\log.\,k\;=3{,}1079727$$

$$\log.\,k''-\log.\,k=0{,}1483245$$

$$\frac{\log.\,k''-\log.\,k}{\log.(1+m)}=t=\frac{0{,}1483245}{0{,}0211892}=7\text{ Jahr.}$$

Beyspiel zu Nr. 4. Ein Kapital von 10201 ℛ︀ 12 ß beläuft sich in 12 Jahren mit Zinsen und Zinsen auf Zinsen zu 18320 ℛ︀; wie viele Procente sind bezahlt worden? $k''=18320$, $k=10201{,}25$, $t=12$.

$$\text{Log.}\,k'' = 4{,}2629255$$
$$\text{Log.}\,k = 4{,}0086539$$

$$\text{Log.}\,k'' - \text{Log.}\,k = 0{,}2542716$$

$$\frac{\text{Log.}\,k'' - \text{Log.}\,k}{t} = \text{Log.}\,(1+m) = \frac{0{,}2542716}{12}$$
$$= 0{,}0211893$$
$$1 + m = 1{,}05;$$

der Zinsfuß ist also $= 0{,}05$ oder 5 Procent gewesen.

§. 123.

Fünfte Aufgabe. Es ist ein Kapital $= k$ gegeben, der Zinsfuß $= m$; man soll die Zeit $= t$ finden, innerhalb welcher dasselbe nebst den Zinsen und Zinsen auf Zinsen $= k''$ n Mal so groß als das erste Kapital k werden kann.

1	$nk = k''$ (Beding.)
2	$(1+m)^t \cdot k = k''$ (§. 122.)
Subst. 1 in 2 = 3	$(1+m)^t \cdot k = nk$
$3 : k = 4$	$(1+m)^t = n$
Log. 4 = 5	$t \cdot \text{Log.}\,(1+m) = \text{Log.}\,n$ (§. 109.)
5 : Log. $(1+m)$ = 6	$t = \dfrac{\text{Log.}\,n}{\text{Log.}\,(1+m)}$.

Z. B. Es wird gefragt, wie viele Zeit erfoderlich sey, damit ein zu 5 Procent ausgeliehenes Kapital mit Zinsen und Zinsen auf Zinsen sich verdoppele? Hier ist $1 + m = 1{,}05$, $n = 2$ und $t = \dfrac{\text{Log.}\,2}{\text{Log.}\,(1+m)}$

$=$

$= \frac{0,3010300}{0,0211893} = 14,20669$, welches 14 Jahr 75 Tage 10,68 Stunden gibt.

§. 124.

Will man eine einfache oder zusammengesetzte Zinse für Tage oder Stunden bestimmen, so kann das nach der vorigen Formel geschehen, wenn man nur in Erinnerung nimmt, daß dann die Zeit $= t$ ein Bruch des Jahrs wird. Das gewöhnliche Jahr hat nämlich 365 Tage; also ist 1 Tag $= \frac{1}{365}$ Jahr, 10 Tage $= \frac{10}{365}$ Jahr u. s. w. Eine Stunde $= \frac{1}{8760}$ Jahr, 2 Stunden $= \frac{2}{8760}$ Jahr u. s. w. Verlangt man z. B. zu wissen, wie viel ein Kapital von 10000 ℛ nebst Zinsen zu 4 Procent in 100 Tagen beträgt, so läßt sich diese Aufgabe nach der Formel $k' = mtk + k$ (§. 118.) auflösen. In diesem Fall ist $m = 0,04$, $t = \frac{100}{365}$, $k = 10000$, also $k' = 0,04 \cdot \frac{100}{365} \cdot 10000 + 10000 = \frac{40000}{365} + 10000 = 109,59 + 10000 = 10109,59$ ℛ. Will man wissen, wie viel ein Kapital von 100000 ℛ in 8 Tagen zu 5 Procent beträgt, so ist in der Formel $(1 + m)^t \cdot k = k''$ (§. 122.), die Zeit $t = \frac{8}{365}$, $k = 100000$ und $1 + m = 1,05$.

$$t \cdot \text{Log.}\,(1 + m) = \frac{8}{365} \cdot \text{Log.}\ 1,05 = 0,0004644$$
$$\text{Log.}\ k = \text{Log.}\ 100000 = 5,0000000$$
$$\text{Log.}\ k'' = 5,0004644,$$

wozu 100107 ℛ gehört, als der Werth von 100000

xC nebst Zinsen und Zinsen auf Zinsen nach Verlauf von 8 Tagen.

Anmerk. Auf die durch die Aufzählung der jährlich Sterbenden und Aufzeichnung ihres Alters entstandenen **Mortalitäts-Tabellen** und auf die vorigen Aufgaben gründet sich die Theorie der **Annuitäten, Leibrenten, Tontinen** und **Wittwenkassen.** Die Annuitäten findet man bey vielen vorzüglich englischen Verfassern erklärt; z. B. introduction to the Mathematicks by J. Ward. London 1740. p. 248-282. Select Exercises by Th. Simpson. Lond. 1752. p. 252-330. Miscellanies containing several mathematical subjects by W. Emerson. Lond. 1776. p. 49-139. Ein klassisches Werk in diesem Fache ist: the doctrine of Annuities and reversions by Th. Simpson. Lond. 1775. Mehrere vortrefliche hieher gehörige Schriften von Morgan, Fuß und Tetens habe ich bereits in der Arithmetik §. 107. Anmerk. 4. angeführt.

Sie-

Siebentes Kapitel.

Arithmetische Progressionen.

§. 125.

Die arithmetische Proportion zwischen vier Größen zeigt, daß so wie aus der ersten durch Addition oder Subtraction einer gewissen Größe die zweyte entsteht, so auch durch Addition oder Subtraction der nämlichen Größe aus der dritten die vierte entstehe (§. 70. Arith.). Heißt die erste Größe oder das erste Glied $= a$ und die zu addirende oder subtrahirende Größe oder der Unterschied der Glieder $= d$, so ist das zweyte Glied entweder $a + d$ oder $a - d$, welches man durch $a \pm d$ andeuten kann. Nennt man nun das dritte Glied b, so ist das vierte Glied $= b \pm d$. Hieraus folgt, daß der allgemeine Ausdruck oder die Formel für jede arithmetische Proportion folgende Gestalt hat: $a - (a \pm d) = b - (b \pm d)$ (§. 77. Arith.). Addirt man nun die äußern Glieder, so ist ihre Summe $= a + (b \pm d)$ und durch die Addirung der mittlern Glieder erhält man die Summe $= (a \pm d) + b$, woraus man ersieht, daß in jeder arithmetischen Proportion die Summe der beyden äußern Glieder der Summe der beyden mittlern gleich ist, welcher Satz schon in der Arithmetik (§. 71. Arith.) synthetisch bewiesen worden ist.

§. 126.

Eine arithmetische Reihe oder **Progression** ist eine Reihe Zahlen, welche alle in einer stetigen arithmetischen Proportion (§. 108. Arith.) sind. Die **steigende arithmetische Progression** entsteht, wenn man beständig einerley Zahl oder gleichen Unterschied addirt, z. B. 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13 u. s. w.

Man nenne das erste Glied = a, den Unterschied der Glieder = d, so ist das erste Glied = a, das zweyte = a + d, das dritte = a + 2 d, das vierte = a + 3 d, das fünfte = a + 4 d und das letzte oder nte Glied = u.

Anzahl der Glieder	1.	2.	3.	4.	5.	n.
Glieder	a,	a+d,	a+2d,	a+3d,	a+4d	-- u.

Die fallende arithmetische Reihe entsteht, wenn immer eine gleiche Größe subtrahirt wird; z. B. 18, 15, 12, 9, 6, 3. Der allgemeine Ausdruck einer fallenden arithmetischen Progression ist folgender:

$$a, a-d, a-2d, a-3d, a-4d, a-5d \; --- \; u.$$

Sowohl die steigende als fallende arithmetische Progression läßt sich unter folgende allgemeine Formel bringen:

$$a, a\pm d, a\pm 2d, a\pm 3d, a\pm 4d, a\pm 5d \; --- \; u.$$

§. 127.

In einer steigenden arithmetischen Progression ist das letzte Glied u der Summe des ersten Glie-

Gliedes a und des Unterschiedes der Glieder d, mit der Anzahl der Glieder n weniger 1 multiplicirt, gleich, d. h. $u = a + d(n - 1)$.

Die allgemeine Formel ist (§. 125.):

Anz. der Glied.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	n.
Glieder selbst:	a,	a+d,	a+2d,	a+3d,	a+4d,	a+5d	--u.

Man ersieht daraus, daß im ersten Gliede sich nur a und kein d befindet; in dem zweyten $a + d$ ist a und nur Ein d; in dem dritten $a + 2d$; in dem vierten $a + 3d$. Weil also d nicht in dem ersten Gliede vorkommt, sondern zuerst in dem zweyten und noch in jedem neuen Gliede Ein Mal zu sich selbst addirt wird, so muß der Coefficient von d in jedem Gliede um 1 kleiner seyn als die Zahl des Gliedes $= n$, also $n - 1$. Hieraus folgt, daß $u = a + (n - 1)d$ ist, so wie das fünfte Glied $= a + (5 - 1)d = a + 4d$, das sechste $= a + (6 - 1)d = a + 5d$ ist.

In der fallenden arithmetischen Progression ist das letzte Glied $= a - (n - 1)d$.

Z. B. Man weiß aus der Erfahrung, daß ein schwerer Körper in der ersten Sekunde ungefähr $15\frac{1}{2}$ Fuß fällt, in der zweyten Sekunde $46\frac{1}{2}$ Fuß, in der dritten $77\frac{1}{2}$ und im allgemeinen in jeder folgenden Sekunde 31 Fuß tiefer als in der vorhergehenden; wie tief wird ein Körper in der zehnten Sekunde fallen? Man sieht leicht, daß die durchlaufenen Räume in einer arithmetischen Progression zunehmen.

Sekunden: 1. 2. 3. 4. 10.
Räume: $15\frac{1}{2}$. $46\frac{1}{2}$. $77\frac{1}{2}$. $108\frac{1}{2}$. --- u.

Hier ist das erste Glied $= a = 15\frac{1}{2}$, der Unterschied der Glieder $= d = 31$, die Anzahl der Glieder $= n = 10$; also $u = a\ (n - 1)\ d = 15\frac{1}{2} + (10 - 1) \cdot 31 = 15\frac{1}{2} + 9 \cdot 31 = 15\frac{1}{2} + 279 = 294\frac{1}{2}$ Fuß; ein Körper also, welcher 10 Sekunden gefallen ist, fällt in der zehnten Sekunde durch einen Raum von $294\frac{1}{2}$ Fuß.

§. 128.

Aus der Formel für das letzte Glied $u = a + (n - 1)\ d = a + nd - d$ (§. 127.) lassen sich drey andere Formeln für a, d und n herleiten, welche zur Auflösung eben so vieler Aufgaben dienen.

1) Wird $a = u - nd + d = u - (n - 1)\ d$, wenn man $+ nd$ und $- d$ mit entgegengesetzten Zeichen auf die andere Seite bringt (§. 21.). Z. B. In einer Pyramide von Kanonenkugeln sind in der letzten Reihe 37 Stück und in jeder der obern Reihen immer zwey weniger und in allen 18 Reihen; wie viele Kugeln enthält die oberste Reihe? Die arithmetische Progression wird folgende:

1 . . . . 13. 14. 15. 16. 17. 18.
a . . . . 27. 29. 31. 33. 35. 37.

also $u = 37$, $d = 2$, $n = 18$; also $a = u -$

(n

$(n-1)d = 37 - (18-1) \cdot 2 = 37 - 34 = 3$; also sind in der obersten Reihe 3 Kugeln.

2) In der Formel $a + (n-1)d = u$ bringe man a auf die andere Seite und dividire durch $n - 1$, so findet man $d = \frac{u-a}{n-1}$. Z. B. Bey Grabung eines Brunnens wird die erste Elle mit 12 ß und nachher jede Elle tiefer mit einer gleichen Zulage bezahlt; man gräbt in allen 20 Ellen und es wird für die zwanzigste und letzte Elle 164 ß bezahlt; wie groß ist die Zulage auf jede Elle $= d$? Man sieht leicht, daß hieraus eine arithmetische Progression hervorgeht, deren erstes Glied $a = 12$, das letzte Glied $u = 164$ und die Anzahl der Glieder $n = 20$ ist; also $d = \frac{u-a}{n-1} = \frac{164-12}{20-1} = \frac{152}{19} = 8$. Für jede Elle tiefer ist also 8 ß mehr bezahlt und die Bezahlung nach folgender arithmetischer Progression geschehen:

1 Elle	2 Elle	3 Elle	4 Elle ...	20 Elle
12 ß	20	28	36	164.

3) In der Formel $a + dn - d = u$ bringe man a und d auf die andere Seite und dividire durch d, so bekommt man:

$$n = \frac{u-a+d}{d} = \frac{u-a}{d} + 1.$$

Z. B. Ein Pferdehändler kauft eine gewisse Anzahl Pferde und gibt 12 ℛ für das erste und nachher immer 4 ℛ mehr für jedes der folgenden und für das letzte bezahlt er 75 ℛ; wie viele Pferde hat er gekauft? In dieser arithmetischen Progression ist $a = 12$, $u = 72$, $d = 4$ und $n = \frac{u - a}{d} + 1 = \frac{72 - 12}{4} + 1 = \frac{60}{4} + 1 = 15 + 1 = 16$.

§. 129.

Man soll zwischen zwey gegebenen Größen a und u eine gewisse Anzahl = m mittler arithmetischer Proportionalzahlen finden.

Es kommt hiebey nur darauf an, daß man den gemeinschaftlichen Unterschied der Glieder $= d$ findet und ist dieser gefunden, so kann man leicht die ganze Progression aufsetzen und jede der zwischenliegenden mittlern arithmetischen Proportionalzahlen finden. Da a das erste und u das letzte Glied ist und zwischen diesen m Zahlen gefunden werden sollen, so muß die Anzahl der Glieder der Progression so groß als m nebst dem ersten und letzten Gliede $= m + 2 = n$ seyn und wenn man 1 subtrahirt, so ist $m + 1 = n - 1$. Diesen Werth setze man in die Formel für d (§. 128. Num. 2.), so ist $d = \frac{u - a}{m + 1}$.

z. B. Zwischen 4 und 112 verlangt man 8 mittlere arithmetische Proportionalzahlen, so ist $a = 4$, $u = 112$, $m = 8$ und $d = \frac{u - a}{m + 1} = \frac{112 - 4}{8 + 1} = \frac{108}{9} = 12$ und die Progression ist folgende:

4. 16. 28. 40. 52. 64. 76. 88. 100. 112.

§. 130.

In jeder arithmetischen Progression ist die Summe der beyden äußern Glieder der Summe zweyer andern gleich, welche von den äußern gleich weit abstehen.

1. 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22.

$\frac{10}{23}$. $\frac{7}{23}$. $\frac{4}{23}$. $\frac{1}{23}$.

Der allgemeine Ausdruck für die arithmetische Progression ist folgender:

1. 2. 3. 4. 5. 6. n.

$a.\ a + d.\ a + 2d.\ a + 3d.\ a + 4d.\ a + 5d$ ---- $a + (n - 1)\,d$.

Das letzte Glied ist $= u = a + (n - 1)\,d$ (§. 128.); das zweyte vom Ende $= a + (n - 2)\,d$; das dritte vom Ende $= a + (n - 3)\,d$; das vierte $= a + (n - 4)\,d$.

Im allgemeinen ist, wenn man die Entfernung eines Gliedes vom Ende oder von $u = a + (n - 1)\,d$ m nennt, dieses Glied oder das mte Glied vom Ende $= a + (n - m)\,d$. Addirt man nun in obiger Progression das erste und letzte Glied, so ist die Summe $= 2a + (n - 1)\,d$; addirt man das zweyte vom Ende =

$= a + (n - 2) d$ zum zweyten vom Anfange $= a + d$, so ist die Summe ebenfalls $= a + (n - 2) d + a + d = a + nd - 2d + a + d = 2a + nd - d = 2a + (n - 1) d$; addirt man ferner das dritte Glied vom Ende $= a + (n - 3) d$ zum dritten vom Anfange $= a + 2d$, so ist die Summe $= a + (n - 3) d + a + 2d = a + nd - 3d + a + 2d = 2a + nd - d = 2a + (n - 1) d$, welches eben dieselbe Summe als die der beyden äußern Glieder gibt. Will man endlich das mte Glied vom Ende $= a + (n - m) d$ zum mten Gliede vom Anfange $= a + (m - 1) d$ addiren, so ist die Summe $= a + (n - m) d + a + (m - 1) d = a + nd - md$ [illegible] $+ md - d = 2a + nd - d = 2a + (n - 1) d$. Hieraus folgt ganz allgemein, daß die Summe der beyden äußern Glieder der Summe zweyer andern Glieder gleich ist, wo auch die Stelle derselben in der Progression seyn mag, wenn sie nur gleich weit von beyden Enden stehen.

§. 131.

Ist die Anzahl der Glieder in einer arithmetischen Progression eine ungerade Zahl, so ist die Summe der beyden äußern Glieder dem doppelten Mittelgliede gleich. Z. B.

3. 5. 7. 9. 11. 13. 15.

$\frac{9}{18}$. $\frac{7}{18}$. $\frac{5}{18}$. $\frac{3}{18}$.

Eine gerade Zahl ist eine solche, welche sich ohne Rest durch 2 theilen läßt, so daß 2 als ein Factor derselben

selben angesehen werden kann; z. B. 10 und 56; eine **ungerade Zahl** heißt diejenige, welche sich nicht durch 2, ohne daß etwas zum Rest bleibt, theilen läßt; z. B. 13, 55, 57 u. s. w. Wenn die Anzahl der Glieder oder n ungerade ist, so steht die mittlere Zahl, z. B. 9, gleich weit von dem ersten Gliede 3 und dem letzten 15, oder das mittlere und mte Glied der Progression von dem letzten oder vom Ende angerechnet $= a + (n - m) d$ (§. 130.) $= a + nd - md$ soll eben so groß seyn als das mte Glied vom Anfange angerechnet $= a + (m - 1) d$ (§. 128) $= a + md - d$; also $a + nd - md = a + md - d$; man subtrahire auf beyden Seiten a, bringe $- md$ auf die andere Seite, so ist $nd = 2 md - d$, und wenn man durch d dividirt, $n = 2 m - 1$, woraus folgt, daß $n + 1 = 2 m$ und $\frac{n+1}{2} = m$ ist. Diesen Werth von m bringe man in die Gleichung für das mittlere Glied $= a + nd - md = a + nd - (\frac{n}{2} + \frac{1}{2}) d = a + nd - \frac{1}{2} nd - \frac{1}{2} d = a + \frac{1}{2} nd - \frac{1}{2} d$, und wenn man dieses mittlere Glied zweymal nimmt, so ist das doppelte $= 2 a + nd - d = 2 a + (n + 1) d$, und also so groß als die Summe der äußern Glieder (§. 130.).

§. 132.

Die Summe jeder arithmetischen Progression $= s$ ist so groß als die Summe der beyden äußern Glieder $= a + u$, multiplicirt mit der hal-

halben Anzahl der Glieder $= \frac{1}{2}$ n d. h. s $=$ $(a+u)\frac{n}{2}$.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & n \\ a, & a+d, & a+2d, & a+3d, & a+4d & \ldots u \\ & & & a+2d & a+d & a \\ \hline & & & 2a+5d & 2a+5d & a+u. \end{array}$$

1) Die Summe der beyden äußern Glieder $= a+u$ ist der Summe zweyer mittlern Glieder gleich, welche von den äußern gleich weit abstehen (§. 130.) oder $a+u = 2a+5d = 2a+5d$ ---- und die Summe der Summen der äußern und mittlern Glieder ist die Summe der ganzen Progression. Ist die Anzahl der Glieder oder n gerade, so gibt es so viele gleich große Summen jede $= a+u$ zu addiren, als die halbe Anzahl der Glieder beträgt; aber $a+u$ $\frac{n}{2}$ Mal zu sich selbst addiren heißt $a+u$ mit $\frac{n}{2}$ multipliciren (§. 14. Arith.). Man findet daher die Summe einer arithmetischen Progression, wenn man die Summe des ersten und letzten Gliedes mit der halben Anzahl der Glieder multiplicirt oder $s = (a+u) \cdot \frac{n}{2}$.

2) Ist die Anzahl der Glieder ungerade, wie

$$\begin{array}{ccccccccccc} a & . & . & . & . & . & . & . & . & . & u \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & n \end{array}$$

so ist es klar, daß das mittlere Glied von beyden Enden gleich weit abstehet und daß die Anzahl der

der Glieder ohne das mittlere $= n - 1$ und die Anzahl der Glieder zu beyden Seiten des mittlern Gliedes $= \frac{n-1}{2} = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$ ist. Die Summe der ganzen Progression ohne das mittlere Glied ist also $(a + u) \cdot (\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}an + \frac{1}{2}nu - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}u$ (§. 132. Nr. 1.). Addirt man dazu das mittlere Glied $= \frac{a+u}{2} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}u$, so hat man die Summe der ganzen Progression $= \frac{1}{2}an + \frac{1}{2}nu - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}u = \frac{1}{2}an + \frac{1}{2}nu = (a + u)\frac{n}{2}$.

Beyspiel. Es ist eine arithmetische Progression von ungerader Zahl gegeben, deren Unterschied $= 2$ ist, nämlich 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 u. s. w. Man verlangt das 1000ste Glied und die Summe der Progression zu wissen. Hier ist $a = 1$, $d = 2$, $n = 1000$; also das letzte oder das 1000ste Glied $u = a + (n - 1)d$ (§. 128.) $= 1 + 2 \cdot 999 = 1 + 1998 = 1999$ und die Summe der Progression $= (a + u)\frac{n}{2} = (1 + 1999) \cdot 500 = 2000 \cdot 500 = 1000000$.

Im allgemeinen läßt sich beweisen, daß, **wie viel oder wenig Glieder der Progression man auch nehmen mag, die Summe derselben dem Quadrat der Anzahl der Glieder gleich ist** oder $s = n^2$. Denn das letzte Glied u ist $= a + (n - 1)d = 1 + (n - 1)2 = 1 + 2n - 2 = 2n - 1$; ferner $s = (a + u)\frac{n}{2} = (1 + 2n - 1)\frac{n}{2} = 2n \cdot \frac{n}{2} = n^2$.

§. 133.

§. 133.

Aus dieser Gleichung für die Summe der arithmetischen Progression oder $s = (a + u)\frac{n}{2} = \frac{1}{2}an + \frac{1}{2}nu$ lassen sich drey andere Formeln herleiten, durch welche man a, u und n finden kann.

1) $s = \frac{1}{2}an + \frac{1}{2}nu$ oder $2s = an + nu$; man bringe nu auf die andere Seite und dividire durch n, so ist $\frac{2s}{n} - u = a$, nach welcher Formel man das erste Glied finden kann, wenn die Anzahl der Glieder $= n$, das letzte Glied $= u$ und die Summe der Progression $= s$ gegeben ist.

Z. B. 50 Personen bezahlen zusammen an Abgaben 5700 Rthl; die reichste und letzte bezahlt 212 Rthl und die übrigen in einer arithmetischen Progression; man fragt, wie viel die ärmste und erste bezahlt? Hier ist $s = 5700$, $u = 212$, $n = 50$ und $\frac{2s}{n} - u = a = \frac{11400}{50} - 212 = 228 - 212 = 16$. Den Unterschied der Glieder wird man $= 4$ finden (§. 128.) und die Progression der Abgaben ist:

1	2	3	4	5	6	7	8		50
16,	20,	24,	28,	32,	36,	40,	44	- -	212

2) Wenn man in der letzten Formel $a = \frac{2s}{n} - u$, a und u mit entgegengesetzten Zeichen auf die andere Seite bringt, so ist $u = \frac{2s}{n} - a$.

Z. B.

Z. B. Ein Landmann hatte anfänglich 28 Schafe und zog jährlich gleich viel zu und nach Verlauf von 12 Jahren hätte er eine Heerde von 600 Stück gehabt, wenn er sie alle behalten hätte; man fragt, wie viele Lämmer er im letzten Jahre zugelegt habe? $a = 28$, $n = 12$, $s = 600$ und $u = \frac{2s}{n} - a = \frac{1200}{12} - 28 = 100 - 28 = 72$ und die Progression der jährlich hinzugekommenen Schafe ist:

1	2	3	4	5	6	7		12
6,	12,	18,	24,	30,	36,	42	- -	72.

3) $2s = an + nu = (a + u)n$ (§. 133. Nr. 1.) und wenn man durch $a + u$ dividirt, ist $\frac{2s}{a+u} = n$.

Z. B. Ein Körper ist durch eine Höhe von 1550 Fuß gefallen und in der letzten Sekunde durch $294\frac{1}{2}$ Fuß und in der ersten durch $15\frac{1}{2}$ Fuß; wie viele Sekunden hat der Körper gebraucht, um durch diese 1550 Fuß zu fallen? $a = 15\frac{1}{2}$, $u = 294\frac{1}{2}$, $s = 1550$, so ist $n = \frac{2s}{a+u} = \frac{3100}{15\frac{1}{2} + 294\frac{1}{2}} = \frac{3100}{310} = 10$ Sekunden.

§. 134.

Nach dem, was vorhin bewiesen ist, ist $s = \frac{1}{2}an + \frac{1}{2}nu$ (§. 132.); aber $u = a + dn - d$ (§. 128.); wenn man also diesen Werth von u in die erste Gleichung setzt, so findet man $s = \frac{1}{2}an + \frac{1}{2}n(a + dn$

$- d) = \frac{1}{2} an + \frac{1}{2} an + \frac{1}{2} dn^2 - \frac{1}{2} dn = an +$ $\frac{1}{2} dn^2 - \frac{1}{2} dn$.

Wenn also das erste Glied $= a$, der Unterschied der Glieder $= d$ und ihre Anzahl $= n$ gegeben ist, so kann man nach dieser Formel die Summe der Progression finden. Z. B. Jemand kauft ein Pferd unter der Bedingung, daß er 8 ß für den ersten Nagel im Hufe desselben und für jeden folgenden Nagel 4 ß mehr bezahlen soll; wenn nun das Pferd 32 Nägel in seinem Hufe hat, wie theuer ist es dann bezahlt worden? $a = 8$, $d = 4$, $n = 32$ und $s = an + \frac{1}{2} dn^2 - \frac{1}{2} dn$ $= 8 \cdot 32 + 2 \cdot 1024 - 2 \cdot 32 = 256 + 2048 -$ $64 = 2240$ ß $= 46$ ℛ︎ 2 ß.

§. 135.

Aus dieser Formel $s = an + \frac{1}{2} dn^2 - \frac{1}{2} dn$ kann man drey andere Formeln herleiten, aus welchen man a, d und n finden kann, wenn die andern drey Stücke gegeben sind.

1) Wenn man $\frac{1}{2} dn^2 - \frac{1}{2} dn$ mit entgegengesetzten Zeichen auf die andere Seite bringt, so findet man $s - \frac{1}{2} dn^2 + \frac{1}{2} dn = an$ und wenn man mit 2 multiplicirt, $2s - dn^2 + dn = 2an$ und wenn man mit 2n dividirt, $\frac{s}{n} - \frac{dn + d}{2}$ $= a$.

2) Wenn die Summe, das erste Glied und der Unterschied der Glieder gegeben ist, dann n zu finden,

den, ist schwerer und erfodert eine quadratische Gleichung.

$$
\begin{array}{r|l}
1 & 2s = 2an + dn^2 - dn \\
2 & 2s = dn^2 + 2an - dn \\
2 : d = 3 & \frac{2s}{d} = n^2 + \frac{2an}{d} - n = n^2 + n\left(\frac{2a}{d} - 1\right) \\
\left(\frac{a}{d} - \frac{1}{2}\right)^2 = 4 & \frac{a^2}{d^2} - \frac{a}{d} + \frac{1}{4} = \left(\frac{a}{d} - \frac{1}{2}\right)^2 \\
3 + 4 = 5 & \frac{2s}{d} + \frac{a^2}{d^2} - \frac{a}{d} + \frac{1}{4} = n^2 + n\left(\frac{2a}{d} - 1\right) \\
 & \qquad + \left(\frac{a}{d} - \frac{1}{2}\right)^2 \\
\sqrt{5} = 6 & \pm\sqrt{\left(\frac{2s}{d} + \frac{a^2}{d^2} - \frac{a}{d} + \frac{1}{4}\right)} = n + \frac{a}{d} - \frac{1}{2} \\
7 & \frac{1}{2} - \frac{a}{d} \pm \sqrt{\left(\frac{2s}{d} + \frac{a^2}{d^2} - \frac{a}{d} + \frac{1}{4}\right)} = n.
\end{array}
$$

Z. B. In einer arithmetischen Progression ist das erste Glied $a = 1$, die Summe $s = 100$, der Unterschied der Glieder $d = 2$; man fragt nach n oder wie viele Glieder in der Progression sind? Es ist also $n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{200}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)} = +\sqrt{100} = 10$. Die Progression hat also 10 Glieder und ist folgende:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19.

3) Endlich soll man den Unterschied der Glieder d finden.

Nach Nr. 1. ist $\frac{s}{n} - \frac{dn + d}{2} = a$ und $\frac{s}{n} - a =$

$\frac{dn + d}{2} = \frac{1}{2} d (n - 1)$ und $\frac{s - an}{n.(n-1)} = \frac{s - an}{n^2 - n} = \frac{1}{2} d$ und $\frac{2s - 2an}{n^2 - n} = d$.

§. 136.

Vorhin (§. 132.) haben wir eine Gleichung $s = \frac{1}{2} an + \frac{1}{2} nu$ und eine andere Gleichung $a = u - dn + d$ (§. 128. Num. 1.) gefunden. Diesen Werth von a setze man in die erste Gleichung, so ist $s = \frac{1}{2} nu - \frac{1}{2} dn^2 + \frac{1}{2} dn + \frac{1}{2} nu = nu - \frac{1}{2} dn^2 + \frac{1}{2} dn$. **Nach dieser Formel kann man die Summe einer arithmetischen Progression finden, wenn der Unterschied der Glieder = d, die Anzahl der Glieder = n und das letzte Glied = u gegeben ist.**

Aus einem Weinfasse zapft man zehn Mal und immer zwey Bouteillen mehr, das zehnte Mal zapft man 20 Bouteillen ab; man fragt, wie viele in allen abgezapft worden sind? Hier ist $d = 2$, $n = 10$, $u = 20$; also $s = 10 . 20 - \frac{2}{2} . 100 + \frac{2}{2} . 10 = 200 - 100 + 10 = 110$ Bouteillen.

§. 137.

Aus der Formel $s = nu - \frac{1}{2} dn^2 + \frac{1}{2} dn$ lassen sich drey andere Formeln und eben so viele Aufgaben herleiten, um u, d und n zu finden.

1)

1) $s + \frac{1}{2}dn^2 - \frac{1}{2}dn = nu$ und $\frac{s + \frac{1}{2}dn^2 - \frac{1}{2}dn}{n}$

$= \frac{s}{n} + \frac{1}{2}dn - \frac{1}{2}d = u.$

2) $s - nu = -\frac{1}{2}dn^2 + \frac{1}{2}dn = d(-\frac{1}{2}n^2$

$+ \frac{1}{2}n)$ und also $\frac{s - nu}{-\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n} = d.$

3) Um n zu finden, muß man eine unvollständige quadratische Gleichung auflösen.

1	$s = nu - \frac{1}{2}dn^2 + \frac{1}{2}dn$
$1 . 2 = 2$	$2s = 2nu - dn^2 + dn$
3	$dn^2 - 2nu - dn = -2s$
$3 : d = 4$	$n^2 - \frac{n(2u + d)}{d} = -\frac{2s}{d}$
5	$n^2 - n(\frac{2u}{d} + 1) = -\frac{2s}{d}$
$5 + (\frac{u}{d} + \frac{1}{2})^2 = 6$	$n^2 - n(\frac{2u}{d} + 1) + (\frac{u}{d} + \frac{1}{2})^2 = -\frac{2s}{d} + \frac{u^2}{d^2} + \frac{u}{d} + \frac{1}{4}$
$\sqrt{6} = 7$	$+ n - \frac{u}{d} - \frac{1}{2} = \pm\sqrt{(-\frac{2s}{d} + \frac{u^2}{d^2} + \frac{u}{d} + \frac{1}{4})}$
8	$n = \frac{u}{d} + \frac{1}{2} \pm \sqrt{(-\frac{2s}{d} + \frac{u^2}{d^2} + \frac{u}{d} + \frac{1}{4})}.$

Z. B. In einer arithmetischen Progression ist d

 $=2,$

$= 2$, $u = 23$, $s = 144$; man sucht die Anzahl der Glieder $n = \frac{23}{2} + \frac{1}{2} \pm \sqrt{(-\frac{288}{2} + \frac{529}{4} + \frac{23}{2} + \frac{1}{4})} = 12 \pm \sqrt{(-144 + 132 + \frac{1}{4} + 11\frac{1}{2} + \frac{1}{4})} = 12 \pm \sqrt{(-144 + 144)} = 12 \pm \sqrt{0} = 12 \pm 0 = 12$ und die Progression ist folgende:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23.

§. 138.

In die Formel $s = \frac{1}{2}an + \frac{1}{2}nu$ (§. 132.) setze man den Werth von $n = \frac{u - a}{d} + 1$ (§. 128. Nr. 3.), so ist $s = \frac{\frac{1}{2}au - \frac{1}{2}a^2}{d} + \frac{1}{2}a + \frac{\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}au}{d} + \frac{1}{2}u = \frac{\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}a^2}{d} + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}u$. Aus dieser Formel kann man die Summe der Progression finden, wenn das erste Glied $= a$, das letzte Glied $= u$ und der Unterschied der Glieder $= d$ gegeben ist. Es sey z. B. $a = 1$, $u = 100$, $d = 1$, so ist $s = \frac{10000}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{100}{2} = 5000 + 50 = 5050$ und die Progression ist folgende:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 .... 100.

§. 139.

Aus der Formel $s = \frac{\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}a^2}{d} + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}u$ (§. 138.) lassen sich drey Formeln und Aufgaben für d, a und u herleiten.

1) $ds = \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}ad + \frac{1}{2}du$ und wenn man alle Glieder, in welchen sich d befindet, auf die andere Seite bringt, so ist $ds - \frac{1}{2}du - \frac{1}{2}ad = \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}a^2$ und wenn man durch die Coefficienten von d dividirt, so ist $d = \frac{\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}a^2}{s - \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}a}$.

2) Um a zu finden, muß man eine quadratische Gleichung auflösen.

1	$ds = \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}ad + \frac{1}{2}du$ (nach Num. 1.)
2	$\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}ad = -ds + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}du$
$2 . 2 = 3$	$a^2 - ad = -2ds + u^2 + du$
$3 + \frac{1}{4}d^2 = 4$	$a^2 - ad + \frac{1}{4}d^2 = -2ds + u^2 + du + \frac{1}{4}d^2$
$\sqrt{4} = 5$	$a - \frac{1}{2}d = \pm\sqrt{(-2ds + u^2 + du + \frac{1}{4}d^2)}$
$5 + \frac{1}{2}d = 6$	$a = \frac{1}{2}d \pm \sqrt{(-2ds + u^2 + du + \frac{1}{4}d^2)}$.

3) Aus der Gleichung Num. 1. kann man gleichfalls das letzte Glied u finden.

1	$ds = \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}ad + \frac{1}{2}du$
2	$ds + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}ad = \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}du$
$2 . 2 = 3$	$2ds + a^2 - ad = u^2 + du$
$3 + \frac{1}{4}d^2 = 4$	$2ds + a^2 - ad + \frac{1}{4}d^2 = u^2 + du + \frac{1}{4}d^2$
$\sqrt{4} = 5$	$\pm\sqrt{(2ds + a^2 - ad + \frac{1}{4}d^2)} = u + \frac{1}{2}d$
$5 - \frac{1}{2}d = 6$	$-\frac{1}{2}d \pm \sqrt{(2ds + a^2 - ad + \frac{1}{4}d^2)} = u$.

Z. B. Die Summe einer Progression ist $= 155 = s$, das erste Glied $a = 2$, der Unterschied der Glieder $d = 3$, so ist das letzte Glied $u = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{(930 + 4 - 6 + \frac{9}{4})} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{(928 + \frac{9}{4})} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{(\frac{3721}{4})} = -\frac{3}{2} + \frac{61}{2} = \frac{58}{2} = 29$.

Achtes Kapitel.

Geometrische Progressionen.

§. 140.

Eine geometrische Progression ist eine Reihe von Zahlen, die in einer stetigen geometrischen Proportion sind (§. 73. Arith.); z. B. $2 . 4 . 8 . 16 . 32 . 64$; denn $2 : 4 = 4 : 8 = 8 : 16 = 16 : 32 = 32 : 64$. Der Exponent oder der Name des Verhältnisses (§. 73. Arith.) ist also in allen diesen Verhältnissen gleich groß und man findet jedes Glied der geometrischen Progression, wenn man das vorhergehende Glied mit dem Exponenten multiplicirt. Ist der Exponent eine ganze Zahl und größer als 1, so entsteht eine **steigende geometrische Progression**; ist z. B. das erste Glied $= a$ und der Name des Verhältnisses $= m > 1$, so ist der allgemeine Ausdruck einer steigenden geometrischen Progression:

$$a . am . am^2 . am^3 . am^4 . am^5 . am^6.$$

Eine

Eine fallende geometrische Progression heißt eine solche, in der das Hinterglied kleiner als das Vorderglied ist und entsteht, wenn jedes Glied mit einem Exponenten, der ein wirklicher Bruch ist, z. B. $m = \frac{2}{3}$, multiplicirt wird. Eine solche Progression ist folgende:

$2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{16}{27} \cdot \frac{32}{81} \cdot \frac{64}{243}$ u. s. w.

§. 141.

Wenn die Anzahl der Glieder $= n$ ist, so ist das dazu gehörige oder $n$te Glied dem ersten Gliede a multiplicirt mit einer Potenz des Exponenten oder m, die der um 1 verminderten Anzahl der Glieder gleich ist, d. h. m zur Potenz $n - 1$, gleich oder das $n$te Glied $u = am^{n-1}$ ist.

Anzahl der Glied.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	n
Glieder selbst	a.	am.	am^2.	am^3.	am^4.	am^5	; ; ; u.

Ist es eine steigende geometrische Progression oder $m > 1$, so ist jedes Glied m Mal größer als das nächst vorhergehende; ist es aber eine fallende Progression oder $m < 1$, so ist jedes Glied m Mal kleiner als das nächst vorhergehende (§. 14. 19. Arith.), woraus folgt, daß man das Hinterglied findet, wenn man das Vorderglied mit m multiplicirt, und das Vorderglied, wenn man das Hinterglied durch m dividirt. So ist das fünfte Glied dem durch m dividirten sechsten Gliede gleich oder $am^5 = \frac{am^6}{m} = am^{6-1} = am^5$ (§. 57.),

 das

das vierte Glied $= am^{4-1}$, das dritte Glied $= am^{3-1}$ und wenn man die Anzahl der Glieder $= n$ nennt, so ist jedes Glied als das letzte $= u$ betrachtet $= am^{n-1}$. In Logarithmen ist Log. $u =$ Log. $a + (n - 1)$ Log. m (§. 107. 108.). Jemand spielt mit einem andern quit oder doppelt. Das erste Mal waren 3 ℛ ausgesetzt und er verliert 10 Mal nach der Reihe; wie viel verliert er beym zehnten Mal? Hier ist $a = 3$, $m = 2$, $n = 10$ und $u = am^{n-1} = 3 \cdot 2^{10-1} = 3 \cdot 2^9 = 3 \cdot 512 = 1536$ und beym zehnten Mal verliert er 1536 ℛ.

§. 142.

Aus der Gleichung für das letzte Glied $u = am^{n-1}$ lassen sich drey andere Gleichungen zur Auflösung eben so vieler Aufgaben, um a, m und n zu finden, herleiten.

1) Weil $u = am^{n-1}$ ist, so dividire man durch m^{n-1}, so ist $\frac{u}{m^{n-1}} = a$. Z. B. Aus einem Wassergefäß hat man 5 Mal Wasser in einer steigenden geometrischen Progression gehohlt: das eine Mal beständig 3 Mal mehr als das nächst vorige Mal und das letzte Mal schöpfte man 243 Bouteillen; man fragt, wie viele Bouteillen man das erste Mal gehohlt habe? Hier ist $n = 5$, $m = 3$ und $u = 243$; also $a = \frac{u}{m^{n-1}} = \frac{243}{3^{5-1}} =$

$\frac{243}{3^4} = \frac{243}{81} = 3$; also hat man das erste Mal 3 Bouteillen geschöpft.

2) Weil $u = am^{n-1}$ ist, so dividire man durch a, so ist $\frac{u}{a} = m^{n-1}$ und $\sqrt[n-1]{\left(\frac{u}{a}\right)} = m$ oder in Logarithmen $\frac{\text{Log. } u - \text{Log. } a}{n-1} = \text{log } m$ (§. 108. 109).

Z. B. In einer geometrischen Progression ist das erste Glied $a = 1$, das letzte $u = 6561$, die Anzahl der Glieder $n = 9$, so ist der Exponent $m = \sqrt[8]{6561}$ oder $\text{log. } m = \frac{\text{Log. } 6561}{8} = \frac{3{,}8169700}{8} = 0{,}4771213 = \text{log. } 3$; der Exponent ist also 3 und die Progression folgende:

1 . 3 . 9 . 27 . 81 . 243 . 729 . 2187 . 6561.

3) Will man die Zahl der Glieder $= n$ finden, so kann das nur durch Hülfe der Logarithmen geschehen (§. 111.). Nämlich weil $u = am^{n-1}$ ist, so hat man $\text{log. } u = \text{log. } a + (n-1) \text{ log. } m = \text{log. } a + n \text{ log. } m - \text{log. } m$ und $\text{log. } u - \text{log. } a + \text{log. } m = n \text{ log. } m$, und wenn man durch log. m dividirt, so findet man $n = \frac{\text{log. } u - \text{log. } a + \text{log. } m}{\text{log. } m} = \frac{\text{log. } u - \text{log. } a}{\text{log. } m} + 1$. Es sey z. B. $a = 2$, $m = 3$, $u = 486$; man sucht n, so ist

log.

$$\text{Log. u} = \text{Log. } 486 = 2{,}686636$$
$$\text{Log. a} = \text{Log. } 2 = 0{,}301030$$

$$\text{Log. u} - \text{Log. a} = \text{Log. } 486 - \text{Log. } 2 = 2{,}385606$$
$$\text{Log. m} = \text{Log. } 3 = 0{,}477121$$

$$\frac{\text{Log. u} - \text{Log. a}}{\text{Log. m}} = \frac{\text{Log. } 486 - \text{Log. } 2}{\text{Log. } 3} = \frac{2{,}385606}{0{,}477121} = 5$$

$$\frac{\text{Log. } 486 - \text{Log. } 2}{\text{Log. } 3} + 1 = n = 5 + 1 = 6$$

Die Progression ist also folgende:

2. 6. 18. 54. 162. 486.

§. 143.

Man soll zwischen zwey gegebenen Größen a und u eine gewisse Anzahl $= r$ mittlerer geometrischer Proportionalzahlen finden.

Erste Auflösung.

1) Wenn man Eine mittlere geometrische Proportionalzahl x finden soll, so ist $r = 1$ und $a : x = x : u$, also $x^2 = a u$ und $x = \sqrt{a u}$. (§. 96. Arith.)

2) Ist $r = 2$, oder soll man zwey mittlere geometrische Proportionalzahlen x und y finden, so ist $a : x = x : y = y : u$, oder das Verhältniß $a : u$ ist dreymal zusammengesetzt aus dem Verhältniß $a : x$ (§. 93. Arith.) oder $a^3 : x^3 = a : u$ (§. 95. Arith.); also $x^3 = \frac{a^3 u}{a} = a^2 u$ und $x = \sqrt[3]{a^2 u}$.

Ferner

Ferner a : x = y : u oder a : $\sqrt[3]{a^2 u}$ = y : u, und wenn man alle Glieder kubirt: $a^3 : a^2 u = y^3 : u^3$; also $a^2 u y^3 = a^3 u^3$ (§. 78. Arith.) und wenn man durch $a^2 u$ dividirt, so hat man $y^3 = \frac{a^3 u^3}{a^2 u} = a u^2$ und $y = \sqrt[3]{a u^2}$.

3) Ist r = 3, oder soll man drey mittlere geometrische Proportionalzahlen x, y und z zwischen a und u finden, so ist a : x = x : y = y : z = z : u $a : u = a^4 : x^4$, also $x^4 = \frac{a^4 u}{a} = a^3 u$ und x $\sqrt[4]{a^3 u}$. Um die zweyte Proportionalzahl y zu finden, ist a : x = x : y oder $a : \sqrt[4]{a^3 u} = \sqrt[4]{a^3 u} : y$, und wenn man alles zur vierten Potenz erhebt, so ist $a^4 : a^3 u = a^3 u : y^4$ und $y^4 = \frac{a^6 u^2}{a^4} = a^2 u^2$ und $y = \sqrt[4]{a^2 u^2}$. Um endlich z zu finden, ist x : y = y : z oder $\sqrt[4]{a^3 u} : \sqrt[4]{a^2 u^2} = \sqrt[4]{a^2 u^2} : z$, und wenn man alles zur vierten Potenz erhebt, $a^3 u : a^2 u^2 = a^2 u^2 : z^4$; $z^4 = \frac{a^4 u^4}{a^3 u} = a u^3$, und wenn man die Wurzel auszieht, ist $z = \sqrt[4]{a u^3}$. Die Progression wird also folgende:

$$a.\ \sqrt[4]{a^3 u}.\ \sqrt[4]{a^2 u^2}.\ \sqrt[4]{a u^3}.\ \text{------}\ u$$

oder $a.\ \sqrt[3+1]{a^3 u}.\ \sqrt[3+1]{a^{3-1} u^2}.\ \sqrt[3+1]{a^{3-2} u^3}\ \text{---}\ u.$

4) Wenn man im Allgemeinen die Anzahl der mittlern geometrischen Proportionalzahlen, die man finden will, = r, das erste Glied a und das letzte u nennt, so ist der allgemeine Ausdruck, um beliebig viele Proportionalzahlen zu finden, folgender:

$$a . \sqrt[r+1]{a^r u} . \sqrt[r+1]{a^{r-1} u^2} . \sqrt[r+1]{a^{r-2} u^3} \sqrt[r+1]{a^{r-3} u^4} \text{---} u.$$

Z. B. Zwischen 10 und 160 soll man drey mittlere geometrische Proportionalzahlen x, y, z finden. Es ist also:

$$x = \sqrt[4]{10^3 . 160} = \sqrt[4]{160000} = 20$$

$$y = \sqrt[4]{10^2 . 160^2} = \sqrt[4]{2560000} = 40$$

$$z = \sqrt[4]{10 \;\; . 160^3} = \sqrt[4]{40960000} = 80$$

Zweyte Auflösung.

Man kann diese Aufgabe auch noch auf eine andere Art auflösen, wenn man, statt jedes Glied der mittlern Proportionalgrößen zu suchen, den Exponenten oder Verhältnißnamen der Glieder m sucht, aus welchem sich jedes Glied finden, und die ganze Progression vom ersten zum letzten Gliede aufsetzen läßt. Wenn man zu zweyen Zahlen eine mittlere Proportionalzahl sucht, so ist die Anzahl der Glieder = 3; sucht man zwey Proportionalzahlen, so ist die Anzahl der Zahlen = 4; sucht man drey, so ist die Anzahl der Glieder = 5; und wenn die Anzahl der Glieder

der

der ganzen Progression $= n$ und die Anzahl der mittlern Proportionalzahlen, die man zwischen a und u finden will, $= r$ ist, so ist vermöge der Natur der Aufgabe $n = r + 2$ und aus der Anzahl der Glieder $n = r + 2$, dem ersten Gliede $= a$ und dem letzten u kann man den Verhältnißnamen $= m$ nach §. 142 Nr. 2 finden, wo $\sqrt[n-1]{\left(\frac{u}{a}\right)} = m$ ist, aber weil $n = r + 2$ und $n - 1 = r + 1$, so ist $\sqrt[r+1]{\left(\frac{u}{a}\right)} = m$. So ist im vorigen Beyspiel, wo man drey mittlere Proportionalzahlen zwischen 10 und 160 finden sollte, $m = \sqrt[4]{\frac{160}{10}} = \sqrt[4]{16} = 2$ und die Progression ist mit allen ihren Gliedern folgende:

10.	20.	40.	80.	160.
a.	x.	y.	z.	u.

§. 143.

In jeder geometrischen Progression von einer geraden Anzahl von Gliedern ist das Product der beyden äußern Glieder dem Product zweyer andern gleich, welche gleich weit von den äußern abstehen.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
a.	am.	am^2.	am^3.	am^4.	am^5.	am^6.	am^7.
				$\frac{am^3}{a^2m^7}$	$\frac{am^2}{a^2m^7}$	$\frac{am}{a^2m^7}$	$\frac{a}{a^2m^7}$

Da

Da in jedem Gliede der Name des Verhältnisses zu einer Potenz erhoben ist, welche um eins größer als in dem vorhergehenden Gliede ist; z. B. im achten Gliede ist am^7; im siebenten $am^{7-1} = am^6$; im sechsten $am^{7-2} = am^5$ u. s. w. so folgt, daß wenn die Anzahl der Glieder $= n$ ist, das letzte Glied oder $u = am^{n-1}$ (§. 141.); das zweyte von u oder vom Ende $= am^{n-2}$; das dritte Glied vom Ende $= am^{n-3}$; das vierte Glied vom Ende $= am^{n-4}$; das fünfte Glied $= am^{n-5}$ und also jedes Glied, dessen Abstand vom Ende der Progression $= e$ ist, oder das ete $= am^{n-e}$. Wenn man aber vom Anfange oder von a anrechnet, so ist das ete Glied vom Anfange als das letzte anzusehen, und $= am^{e-1}$ (§. 141.). Wenn man nun diese Glieder, deren eins $= am^{n-e}$ eben so weit vom Ende steht, als das andere am^{e-1} vom Anfange stehet, mit einander multiplicirt, so ist das Product $= (am^{n-e}).(am^{e-1}) = a^2m^{n-e+e-1}$ (§. 56) $= a^2 m^{n-1}$ dem Product der beyden äußern $a\,(am^{n-1}) = a^2 m^{n-1}$ gleich.

§. 144.

Ist die Anzahl der Glieder einer geometrischen Progression ungerade, so ist das Product der äußern Glieder dem Quadrat des mittlern Gliedes gleich.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
a .	am .	am^2 .	am^3 .	am^4 .	am^5 .	am^6
			$\frac{am^3}{a^2m^6}$	$\frac{am^2}{a^2m^6}$	$\frac{am}{a^2m^6}$	$\frac{a}{a^2m^6}$

Das

Das Product des ersten und letzten Gliedes ist $a \cdot am^6 = a^2 m^6$ (§. 56.) und eben so groß als das Quadrat des mittlern Gliedes $(am^3)^2 = a^2 m^6$. Ist die Anzahl der Glieder ungerade und gibt es also ein Mittelglied, welches gleich weit = e vom Anfange und Ende oder vom ersten und letzten Gliede steht, oder ist am^{e-1} (das ete Glied vom Anfange) $= am^{n-e}$ (das ete Glied vom Ende), so ist das Product derselben ein Quadrat (§. 56. Arith.) und $= (am^{e-1}) \cdot (am^{n-e}) = a^2 m^{n-e+e-1}$ (§ 56.) $= a^2 m^{n-1} = a \cdot (am^{n-1})$ und also dem Product der beyden äußern Glieder a und am^{n-1} gleich.

§. 145.

Man findet die Summe einer geometrischen Progression = s: 1) wenn man das letzte Glied = u mit dem Exponenten = m multiplicirt; 2) von diesem Product mu das erste Glied a subtrahirt und 3) den Unterschied mu — a durch den Exponenten weniger eins oder m — 1 dividirt, d. h. $s = \frac{mu - a}{m - 1}$.

Da in jeder geometrischen Progression:

$$a \cdot am \cdot am^2 \cdot am^3 \cdot am^4 \cdot u$$

alle Glieder in einer stetigen geometrischen Proportion sind (§. 109. Arith.), so verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder, wie eins der Vorderglieder zu einem der Hinterglieder (§. 86. Arith.) oder

$$\begin{array}{l} a : am \\ am : am^2 \\ am^2 : am^3 \\ am^3 : am^4 \\ am^4 : u \end{array}$$

$$a + am + am^2 + am^3 + am^4 : am + am^2 + am^3 + am^4 + u = a : am.$$

Man nenne nun die Summe der ganzen Progression $= s$. Es fällt in die Augen, daß die Summe der Vorderglieder alle Glieder der Progression außer dem letzten u enthält und daß also die Summe aller Vorderglieder die Summe der ganzen Progression außer dem letzten Gliede oder $= s - u$ ist. Gleichfalls sieht man, daß sich in der Summe aller Hinterglieder die Summe der ganzen Progression außer dem ersten Gliede a findet und also die Summe aller Hinterglieder $= s - a$ ist. Also:

	$s - u : s - a = a : am$
1	$ams - aum = as - a^2$ (§. 78. Arith.)
$1 : a = 2$	$ms - um = s - a$
$2 + um = 3$	$ms = s - a + um$
$3 - s = 4$	$ms - s = um - a$
5	$(m - 1)\, s = um - a$
$5 : (m - 1) = 6$	$s = \frac{um - a}{m - 1}$.

Z. B. Jemand kaufte eine Schatulle mit 21 Schiebladen unter der Bedingung, daß er für die erste Schieblade

lade 1 ß und für jede folgende doppelt so viel bezahlen soll. Es wird gefragt, was die letzte Schieblade und die ganze Schatulle gekostet habe? Diese Aufgabe leitet auf eine geometrische Progression, wo das erste Glied a = 1, der Exponent m = 2 und die Anzahl der Glieder = 21, woraus man das letzte Glied $u = am^{n-1} = 1 . 2^{21-1} = 2^{20}$ und in Logarithmen ausgedrückt, Log. u = 20 . Log. 2 (§. 109.) = 20 . 0,3010299956 = 6,0205999120, wozu die Zahl 1048576 gehört und so viel Schillinge kostet die 21ste Schieblade. Der Preis der Schatulle ist die Summe der geometrischen Progression, deren erstes Glied a = 1, letztes Glied u = 1048576 und Exponent m = 2 ist; also $s = \frac{mu - a}{m - 1} = \frac{2 . 1048576 - 1}{1} = 2 . 1048575$ = 2097150 ß = 43690 ℛ 30 ß.

§. 146.

Wenn man in der Formel für die Summe der geometrischen Progression $s = \frac{mu - a}{m - 1}$ **drey Größen als bekannt ansieht, so kann man die vierte a, u oder m finden.**

1) Weil $s = \frac{mu - a}{m - 1}$, so ist $ms - s = mu - a$ und, wenn man alle Zeichen verändert, $-ms + s = -mu + a$ (§. 21.) und, wenn man $-mu$ auf die andere Seite bringt, so ist $mu - ms + s = a$.

2)

2) $ms - s = mu - a$; man bringe $- a$ auf die andere Seite, so ist $ms - s + a = mu$; man dividire durch m, so ist $\frac{ms - s + a}{m} = u$ oder $s - \frac{s + a}{m} = u$.

3) In der Gleichung $ms - s = mu - a$ bringe man die Producte von m auf eine und dieselbe Seite, so ist $ms - mu = (s - u) m = s - a$ und $m = \frac{s - a}{s - u}$. Z. B. Jemand besitzt ein Kapital von 34100 ℛ︎, welches er nebst den Zinsen in einer gewissen Anzahl von Jahren verzehrt; im ersten Jahre nimmt er 100 ℛ︎ vom Kapital auf und im letzten 25600 ℛ︎ und das, was er jährlich vom Kapital aufnimmt, geht in einer geometrischen Progression fort; man sucht den Exponenten dieser Progression. Hier ist $a = 100$, $u = 25600$, $s = 34100$, so ist $m = \frac{s - a}{s - u} = \frac{34100 - 100}{34100 - 25600} = \frac{34000}{8500} = 4$. In dem zweyten Jahre nimmt er also 400 ℛ︎, in dem dritten 1600 ℛ︎, im vierten 6400 ℛ︎ und im fünften 25600 ℛ︎ auf.

§. 147.

In die Gleichung $s = \frac{mu - a}{m - 1}$ (§. 145.) kann man

den

den Werth von $u = am^{n-1}$ (§. 141.) setzen, so ist $s = \frac{am^{n-1+1} - a}{m-1} = \frac{am^n - a}{m-1} = \frac{a(m^n - 1)}{m-1}$ und aus dieser Formel kann man die Summe einer geometrischen Progression finden, wenn das erste Glied $= a$, der Name des Verhältnisses $= m$ und die Anzahl der Glieder $= n$ bekannt sind. Z. B. wie groß ist die Summe einer geometrischen Progression, deren erstes Glied $= 3$, der Name des Verhältnisses $= 2$ und die Anzahl der Glieder $= 8$ ist? Hier ist $s = \frac{a(m^n - 1)}{m-1} = \frac{3(2^8 - 1)}{2-1} = \frac{3 \cdot (256-1)}{1} = 3 \cdot 255 = 765$.

§. 148.

Aus der Gleichung $s = \frac{am^n - a}{m-1}$ lassen sich drey andere Gleichungen herleiten, aus denen man a, m und n finden kann.

1) Man multiplicire mit $m - 1$, so ist $ms - s = am^n - a = a(m^n - 1)$ und wenn man durch $m^n - 1$ dividirt, so hat man $\frac{ms - s}{m^n - 1} = a = \frac{s \cdot (m-1)}{m^n - 1}$.

2) In der Gleichung $ms - s = am^n - a$ dividire man durch a, so ist $\frac{ms}{a} - \frac{s}{a} = m^n - 1$ und wenn man alles auf eine und dieselbe Seite bringt, $o =$

$m^n = \frac{ms}{a} + \frac{s}{a} - 1$. Aus dieser Gleichung kann man wirklich m finden, obgleich nicht nach den bis jetzt erklärten Regeln. Denn diese Gleichung übersteigt den Grad der quadratischen Gleichungen und gehört zu den höhern Gleichungen; wird aber hier der Vollständigkeit wegen angeführt.

3) In der Gleichung $ms - s = am^n - a$ bringe man $- a$ auf die andere Seite, so ist $ms - s + a = am^n$ und dividire durch a, so hat man $\frac{ms - s - a}{a} = m^n$. Diese Gleichung läßt sich ohne Logarithmen nicht auflösen (§. 110.) und dann ist $\text{Log.}(ms - s - a) - \text{Log.}\, a = n \,.\, \text{Log.}\, m$ (§. 107. 108.) und wenn man durch Log. m dividirt, so ist

$$\frac{\text{Log.}\,(ms - s - a) - \text{Log.}\, a}{\text{Log.}\, m} = n.$$

Z. B. Jemand spielt quit oder doppelt und verliert das erste Mal 3 Rthlr. und in allen 3069 Rthlr.; wie viel Mal hat er verloren? Hier ist $a = 3$, $m = 2$, $s = 3069$, also $ms - s + a = 6138 - 3069 + 3 = 3072$.

$$\begin{array}{lr} \text{Log. } 3072 & = 3{,}487421 \\ \text{Log. } 3 & = 0{,}477121 \\ \hline \text{Log. } 3072 - \text{Log. } 3 & = 3{,}010300 \\ \text{Log. } 2 & = 0{,}301030 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{\text{Log. } 3072 - \text{Log. } 3}{\text{Log. } 2} = n = \frac{3{,}010300}{0{,}301030} = 10.$$

Also

Also hat er 10 Mal in folgender geometrischen Progression verloren:

3. 6. 12. 24. 48. 96. 192. 384. 768. 1536.

§. 149.

Wenn man in die Formel für die Summe der geometrischen Progression $s = \frac{mu - a}{m - 1}$ den Werth von a $= \frac{u}{m^{n-1}}$ (§. 142. Num. 1.) setzt, so erhält man:

$$s = (mu - \frac{u}{m^{n-1}}) : (m - 1).$$

Wenn man durch m^{n-1} dividirt oder die Division allgemein macht, so ist

$$s = \left(\frac{m^n u - u}{m^{n-1}}\right) : m - 1$$

$$s = \left(\frac{u(m^n - 1)}{m^{n-1}}\right) : (m - 1)$$

und wenn man endlich durch $m - 1$ dividirt, so ist

$$s = \frac{u}{m^{n-1}} \cdot \frac{m^n - 1}{m - 1}.$$

Durch diese Formel kann man die Summe einer geometrischen Progression finden, wenn der Name des Verhältnisses $= m$, die Anzahl der Glieder $= n$ und das letzte Glied $= u$ gegeben sind.

Z. B. Jemand hat quit oder doppelt gespielt und 8 Mal und das letzte Mal 640 ℛ verspielt; wie groß ist sein Verlust in allen gewesen? Hier ist $m = 2$, n

$= 8$, $u = 640$, alſo $s = \frac{640}{2^7} \cdot \left(\frac{2^8 - 1}{2 - 1}\right) = \frac{640}{128} \cdot \frac{255}{1} = 5 \cdot 255 = 1275$ rℰ. Sein Verluſt war alſo in folgender geometriſchen Progreſſion:

5. 10. 20. 40. 80. 160. 320. 640.

§. 150.

Aus der Formel (§. 149.) laſſen ſich drey andere herleiten, aus welchen man das letzte Glied u, die Anzahl der Glieder n und den Namen des Verhältniſſes m finden kann.

1) Um u zu finden.

$s = \frac{u}{m^{n-1}} \cdot \left(\frac{m^n - 1}{m - 1}\right)$ (§. 149.)

$sm^{n-1} = u \cdot \left(\frac{m^n - 1}{m - 1}\right)$ (multipl. mit m^{n-1})

$sm^{n-1}(m-1) = u(m^n - 1)$ (mult. mit $m-1$)

$sm^{n-1}\left(\frac{m - 1}{m^n - 1}\right) = u$ (dividirt durch $m^n - 1$).

2) Um n zu finden.

$s = \left(mu - \frac{u}{m^{n-1}}\right) : (m - 1)$ (§. 149.)

$ms - s = mu - \frac{u}{m^{n-1}}$ (multipl. mit $m - 1$)

$-mu + ms - s = -\frac{u}{m^{n-1}}$ (mu auf die andere Seite gebracht)

$mu - ms + s = \frac{u}{m^{n-1}}$ (alle Zeichen verändert (§. 21.))

Man

Man bediene sich der Logarithmen (§. 107. 108.)

$\log.(mu - ms + s) = \log.u - (n-1)\log.m$

$\log.(mu - ms + s) = \log.u - n\log.m + \log.m.$

Man verändere alle Zeichen.

$-\log.(mu - ms + s) = -\log.u + n.\log.m - \log.m.$

Man bringe $-\log.u$ und $-\log.m$ auf die andere Seite.

$\log.u - \log.(mu - ms + s) + \log.m = n.\log.m.$

Man dividire durch $\log.m$.

$$\frac{\log.u - \log.(mu - ms + s)}{\log.m} + 1 = n.$$

3) Um m zu finden, fange man mit folgender Gleichung nach Nr. 2. an.

$$ms - mu - s = \frac{-u}{m^{n-1}}.$$

Man multiplicire mit m^{n-1}.

$m^n s - m^n u - sm^{n-1} = -u$

$m^n(s-u) - sm^{n-1} = -u.$

Man dividire durch $s - u$.

$$m^n - m^{n-1}\frac{s}{s-u} = -\frac{u}{s-u}.$$

Man bringe $-\frac{u}{s-u}$ auf die andere Seite, wodurch die Gleichung $= 0$ wird.

$$m^n - m^{n-1}\frac{s}{s-u} + \frac{u}{s-u} = 0.$$

 Diese

Diese Gleichung ist eben so wie die (§. 148. Nr. 2.) eine höhere Gleichung und wird hier nur der Vollständigkeit wegen angeführt. Wäre z. B. n = 6, u = 32, s = 63 und man wollte m wissen, so würde die Gleichung, aus der m gefunden werden kann, eine Gleichung der sechsten Ordnung und folgende seyn:

$$m^6 - \frac{63\,m^5}{31} + \frac{63}{31} = 0.$$

§. 151.

Wenn man in die Gleichung für die Summe einer geometrischen Progression $s = \frac{mu - a}{m - 1}$ (§. 145.) den Werth von $m = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$ (§. 142. Num. 2.) einführt, so ist, weil $\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}} = \frac{u^{\frac{1}{n-1}}}{a^{\frac{1}{n-1}}}$, $s = \left(u.\frac{u^{\frac{1}{n-1}}}{a^{\frac{1}{n-1}}} - a\right) : \left(\frac{u^{\frac{1}{n-1}}}{a^{\frac{1}{n-1}}} - 1\right)$.

Wenn man nun die nur angedeutete Multiplication wirklich verrichtet (§. 11.) und a und 1 mit $a^{\frac{1}{n-1}}$ multiplicirt, um die Division allgemein zu machen, so ist

$$s = \left(\frac{u^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{a^{\frac{1}{n-1}}}\right) : \frac{u^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}{a^{\frac{1}{n-1}}}.$$

Da aber die Brüche gleiche Nenner haben, so hat man nur nöthig, die Zähler zu dividiren (§. 13.); also

$$s = \frac{u^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{u^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}.$$

Weil die Exponenten allenthalben durch n — 1 dividirt sind, so soll diese Wurzel aus Zähler und Nenner gezogen werden (§. 65.); also

$$s = \frac{\sqrt[n-1]{u^n} - \sqrt[n-1]{a^n}}{\sqrt[n-1]{u} - \sqrt[n-1]{a}} = \sqrt[n-1]{\left(\frac{u^n - a^n}{u - a}\right)}$$

Aus dieser Gleichung kann man **die Summe einer geometrischen Progression finden, wenn das erste Glied = a, das letzte = u und die Anzahl der Glieder = n gegeben sind.**

Z. B. In einer geometrischen Progression ist das erste Glied a = 3, das letzte u = 48, die Anzahl der Glieder n = 5; wie groß ist die Summe dieser Progression? Es ist also

$$s = \frac{\sqrt[4]{48^5} - \sqrt[4]{3^5}}{\sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{3}}.$$

Am leichtesten kann man durch Hülfe der Logarithmen diese Größen zu Potenzen erheben und die Wurzeln ausziehen.

$$\text{Log. } 48 = 1,6812412375$$
$$5$$
$$5 \cdot \text{Log. } 48 = 8,4062061865$$

$$\text{Log. } \sqrt[4]{48^5} = \frac{5 \cdot \text{Log. } 48}{4} = 2,1015515 \cdots$$

$$\sqrt[4]{48^5} = 126,343.$$

Auf eben die Art findet man $\sqrt[4]{3^5} = 3,9482$, $\sqrt[4]{48} = 2,632$ und $\sqrt[4]{3} = 1,316$; also

$$s = \frac{126,343 - 3,948}{2,632 - 1,316} = \frac{122,395}{1,316} = 93$$

und die Progression ist folgende:

3. 6. 12. 24. 48.

Anmerk. Aus der gefundenen Gleichung für die Summe einer geometrischen Progression (§. 151.) lassen sich drey andere Gleichungen herleiten, um u, a und n zu finden, welche wir der Kürze wegen hier übergehen müssen.

§. 152.

Oben (§. 115. 118.) ist ein auf Zinsen ausgethanes Kapital = k und die jährliche Zinse von 1 ℛ = m und also Kapital und Zinsen von 1 ℛ nach Verlauf Eines Jahrs = 1 + m (§. 121.) genannt worden. Der Kürze wegen nenne man nun 1 + m = R. Wenn nun zum Hauptkapital k außer den Zinsen noch jährlich ein zweytes Kapital p gelegt wird, so ist das Ganze am Schluß des ersten Jahres = Rk + p (§. 121.). Hievon muß im zweyten Jahr Zinsen auf Zinsen bezahlt werden; also muß man dies mit R multipliciren, so findet man Kapital nebst Zinsen auf Zinsen = $R^2k + Rp$ (§ 121.) und wenn dazu noch ein Kapital p kommt, so ist das Ganze am Schluß des zweyten Jahrs = $R^2k + Rp + p$. Hievon wird nun

zu-

zusammengesetzte Zinse bezahlt und folglich ist das Kapital im dritten Jahr $= R^3k + R^2p + Rp$. Wenn nun hiezu abermals p gelegt wird, so ist das Ganze am Schluß des dritten Jahrs $= R^3k + R^2p + Rp + p$ und man sieht leicht, daß am Schluß eines jeden folgenden Jahrs herauskommen wird:

Erstes Jahr $= Rk + p$

Zweytes — $= R^2k + Rp + p$

Drittes — $= R^3k + R^2p + Rp + p$

Viertes — $= R^4k + R^3p + R^2p + Rp + p$

t tes — $= R^tk + R^{t-1}p + R^{t-2}p + R^{t-3}p \cdots + p.$

§. 153.

Wenn ein Kapital k auf zusammengesetzte Zinse ausgeliehen ist und dazu noch jährlich ein anderes Kapital p gelegt wird, wovon gleichfalls zusammengesetzte Zinse berechnet wird, so ist nach Verlauf von t Jahren das Ganze, nämlich Kapital und Zinsen auf Zinsen oder $q = R^t.k + \frac{R_t p - p}{R - 1}$.

Betrachtet man die Größen, welche den Werth sowohl des Kapitals als auch der Zinsen und Zinsen auf Zinsen für ein gegebenes Jahr ausdrücken, z. B. für das vierte (§ 152.), so wird man finden, daß diese Größen sich in zwey Theile theilen lassen. Der erste Theil ist $= R^4k$ oder in allgemeinen Ausdrücken $= R^t.k$.

$R^t.k$. Der andere Theil ist $= R^3p + R^2p + Rp + p$, welcher, wie man gleich sieht, eine verkehrt stehende wachsende geometrische Progression ist (§. 140.), deren erstes Glied $= p$, der Name des Verhältnisses $= R$ und das letzte Glied $= R^3p$ ist. Summirt man diese Progression, so ist $s = \frac{R^4p - p}{R - 1}$ (§. 145.). Der Werth sowohl des Kapitals als auch der Zinsen und Zinsen auf Zinsen ist daher am Schluß des vierten Jahres $= R^4k + \frac{R^4p - p}{R - 1}$. In dem allgemeinen Ausdruck für das $t$te Jahr ist der zweyte Theil $= R^{t-1}p + R^{t-2}p + R^{t-3}p \text{ - - - - } + p$, welches ebenfalls eine geometrische Progression ist (§. 140.), deren erstes Glied $= p$, der Name des Verhältnisses $= R$, die Anzahl der Glieder $= t$ und das letzte Glied $= R^{t-1}p$ ist. Die Summe derselben findet man (§. 145.), wenn man 1) das letzte Glied $R^{t-1}p$ mit R multiplicirt $= R^{t-1+1}p = R^tp$ (§. 56.); 2) hievon das erste Glied subtrahirt $= R^tp - p$; 3) diesen Unterschied $R^tp - p$ durch den Namen des Verhältnisses weniger 1 oder $R - 1$ dividirt oder $s = \frac{R^tp - p}{R - 1}$. Dies ist die Summe der geometrischen Progression oder des zweyten Theils der obigen Größe. Addirt man hiezu nun noch den ersten Theil $= R^tk$, so hat man den Werth sowohl des Kapitals als auch der Zinsen und Zinsen auf Zinsen nach Verlauf von t Jahren oder

$$q = R^t k + \frac{R^t p - p}{R - 1}.$$

Z. B. Ein Kapital von 1000 Rthlr. wird auf zusammengesetzte Zinsen zu 5 Procent ausgethan und überdies noch jährlich ein Kapital von 100 Rthlr. hinzugelegt; wie viel beträgt das Ganze nach Verlauf von 25 Jahren? Hier ist $R = 1{,}05$, $k = 1000$ Rthlr., $p = 100$, $t = 25$. Den ersten Theil $R^t k$ suche man durch Logarithmen; nämlich $\log. (R^t k) = t . \log. R + \log. k$.

$$\log. R = \log. 1{,}05 = 0{,}02118929907$$

$$t . \log. R = 25 . \log. (1{,}05) = 0{,}52973247675$$
$$\log. k = \log. 1000 = 3{,}00000000000$$

$$t . l. R + l. k = 25 l. 1{,}05 + l. 1000 = 3{,}52973247675.$$

Der erste Theil $R^t k$ ist also $= 3386{,}3554$ Rthlr. Wenn man auch den zweyten Theil in Logarithmen ausdrückt, so ist $\log. \left(\frac{R^t p - p}{R - 1}\right) = \log. \frac{(R^t - 1) p}{R - 1} = \log. (R^t - 1) + \log. p - \log. (R - 1)$ (§. 108. 109.). Aus dem eben gefundenen $\log. R^t = 25 . \log. (1{,}05)$ ist klar, daß $R^t = 3386{,}3554$ Rthlr. und $R^t - 1 = 2{,}3863554$ und das Uebrige findet man durch folgende Rechnung:

$$\log. (R^t - 1) = 0{,}3777351$$
$$\log. p = 2{,}0000000$$

$$\log. (R^t - 1) + \log. p = 2{,}3777351$$

log.

$\log. (R - 1) = 8,6989700$ (§. 120. Arith.)

$\log. \left(\frac{R^t p - p}{R - 1}\right) = 3,6787651,$

wozu 4772,7011 Rthlr gehört.

Also der erste Theil der Formel = 3386,3554 Rthlr

der zweyte Theil = 4772,7011 Rthlr

Summe = 8159,0565 Rthlr.

Nach Verlauf von 25 Jahren beträgt also der Werth des Kapitals nebst der jährlichen Zugabe und Zinsen und Zinsen auf Zinsen in allen 8159,0565 Rthlr.

§. 154.

Es ist der Werth von 1 Rthlr nebst Zinsen für Ein Jahr $= R$, ein Kapital $= k$, welches t Jahre ausgethan gewesen ist, wozu aber jährlich eine gewisse unbekannte Zulage $= p$ hinzukam, und der endliche Werth des Kapitals nebst der Zulage und Zinsen und Zinsen auf Zinsen nach t Jahren $= q$ gegeben; man soll die Zulage p bestimmen.

1	$R^t k + \frac{R^t p - p}{R - 1} = q$ (§. 153.)
$1 - R^t k = 2$	$\frac{R^t p - p}{R - 1} = q - R^t k$
$2.(R - 1) = 3$	$R^t p - p = Rq - q - R^{t+1}k + R^t k$ $= (R - 1) q - k . (R^{t+1} + R^t)$
$3 : (R^t - 1) = 4$	$p = \frac{(R - 1) q - k . (R^{t+1} + R^t)}{R^t - 1}.$

§. 155.

§. 155.

Es ist der Werth von 1 Rthl. nebst den Zinsen für Ein Jahr = R gegeben. Zu einem unbekannten Kapital = k wird jährlich ein anderes gegebenes Kapital = p gelegt. Das Ganze nebst Zinsen und Zinsen auf Zinsen beträgt in t Jahren = q; man soll das unbekannte Kapital k suchen.

1	$R^t k + \frac{R^t p - p}{R - 1} = q$ (§. 153.)
$1 . (R - 1) = 2$	$R^{t+1} k - R^t k + R^t p - p = (R - 1) q$
$2 - R^t p = 3$	$R^{t+1} k - R^t k - p = (R - 1) q - R^t p$
$3 + p = 4$	$R^{t+1} k - R^t k = (R - 1) q - R^t p + p$
$4 : (R^{t+1} - R^t) = 5$	$k = \frac{(R - 1) q - R^t p + p}{R^{t+1} - R^t} = \frac{(R - 1) q - (R^t + 1) p}{R^{t+1} - R^t}.$

§. 156.

Es ist noch übrig die Zeit t zu finden, wenn R, k, p und q gegeben sind. Wenn man in der Formel (§. 153.) R als den allgemeinen Ausdruck des Werths von 1 Rthl. nebst Zinsen für Ein Jahr nach jedem beliebigen Zinsfuß oder R = 1 + m (§. 152.) beybehält, so entstehen daraus sehr weitläuftige und zusammengesetzte Gleichungen. Nimmt man hingegen den Zinsfuß zu gewissen Procenten, z. B. 4, 5, 6 u. s. w. an, so wer-

den die Gleichungen viel kürzer. Man nehme z. B. den Zinsfuß zu 4 Procent an, so ist $R = 1{,}04$, welchen Werth man in die allgemeine Formel $R^t k + \frac{R^t p - p}{R - 1} = q$ setzt, wodurch man $(1{,}04)^t . k + \frac{(1{,}04)^t p - p}{0{,}04} = q$ erhält, und wenn der zweyte Theil wirklich durch $0{,}04 = \frac{4}{100}$ dividirt wird, so ist er $= ((1{,}04)^t . p - p) : \frac{4}{100} = ((1{,}04)^t . p - p) . \frac{100}{4} = ((1{,}04)^t . p - p) . 25 = 25\,(1{,}04)^t . p - 25\,p$. Setzt man nun dies statt des zweyten Theils, so ist $q = (1{,}04)^t . k + 25\,(1{,}04)^t . p - 25\,p = (1{,}04)^t . (k + 25\,p) - 25\,p$. Für den Zinsfuß von 5 Procent oder $R = 1{,}05$ wird man $q = (1{,}05)^t . (k + 20\,p) - 20\,p$ finden.

§. 157.

Es ist der Zinsfuß zu 5 Procent, ein Kapital $= k$, das jährlich hinzugelegte Kapital $= p$ und das aus beyden entstandene Kapital nebst Zinsen und Zinsen auf Zinsen $= q$ gegeben; man soll die verflossene Zeit $= t$ finden.

1	$(1{,}05)^t . (k + 20p) - 20p = q$ (§. 156)
$1 + 20p = 2$	$(1{,}05)^t . (k + 20p) = q + 20p$
$2 : (k + 20p) = 3$	$(1{,}05)^t = \frac{q + 20p}{k + 20p}$
$\log. 3 = 4$	$t . \log. (1{,}05) = \log. (q + 20p) - \log. (k + 20p)$
$4 : \log. (1{,}05) = 5$	$t = \frac{\log. (q + 20p) - \log. (k + 20p)}{\log. (1{,}05)}$

Z. B. Ein Kapital von 1000 ℛ wird zu 5 Procent ausgethan und außer den Zinsen und Zinsen auf Zinsen noch jährlich 100 ℛ zum Kapital gelegt; man fragt, wie lange Zeit erfoderlich sey, damit das Ganze zu einer Million Thaler anwachse? Hier ist $k = 1000$, $p = 100$, $q = 1000000$, also $q + 20p = 1000000 + 2000 = 1002000$ und $k + 20p = 1000 + 2000 = 3000$; folglich

$$\begin{aligned} \text{Log. } 1002000 &= 6{,}0008677 \\ \text{Log. } 3000 &= 3{,}4771213 \end{aligned}$$

$$\text{Log. } 1002000 - \text{Log. } 3000 = 2{,}5237464$$

$$t = \frac{\text{Log. } 1002000 - \text{Log. } 3000}{\text{Log. } 1{,}05} = \frac{2{,}5237464}{0{,}0211893}$$

also ist $t = 119\frac{22197}{211893} = 119$ Jahr 38 Tage.

§. 158.

In dem Vorhergehenden haben wir angenommen, daß das Kapital k jährlich durch ein anderes hinzugelegtes Kapital p (§. 152. 158.) vermehrt ward. Nun wollen wir im Gegentheil annehmen, daß das Kapital jährlich vermindert oder von demselben jährlich ein anderes Kapital p abgenommen werde. Wenn man die §. 152. angeführten Gleichungen ansieht, so wird man leicht begreifen, daß alle die Glieder, in welchen p positiv war, nun negativ werden, woraus folgt daß in der allgemeinen Gleichung $R^t . k + \frac{R^t . p - p}{R - 1}$

 =

$= q$ (§. 153.) jetzt der zweyte Theil, welcher die Summe aller Glieder ist, die das negative p enthalten, negativ werde und daß also, wenn p jährlich das Kapital vermindert, der endliche Werth von k nach Verlauf von t Jahren oder $q = R^t . k - \left(\frac{R^t p - p}{R - 1}\right)$ seyn werde.

Aus dieser Formel kann man eben solche Gleichungen für ein abnehmendes Kapital herleiten, als die vorhin angeführten für ein wachsendes waren (§. 153-157.). Als ein Beyspiel wollen wir bloß die letzte Aufgabe, um t zu finden (§. 157.), hier auflösen. Wenn $R = 1{,}05$, so ist $q = (1{,}05)^t k - \left(\frac{(1{,}05)^t . p - p}{0{,}05}\right) = (1{,}05)^t k - (20 . (1{,}05)^t p - 20 p) = (1{,}05)^t . k - 20 . (1{,}05)^t p + 20 p = (1{,}05)^t . (k - 20 p) + 20 p$, welche Gleichung mit der (§. 156.) einerley ist, nur daß $-p$ und $+p$ hier in $+p$ und $-p$ übergegangen sind, wobey nur noch zu bemerken ist, daß, wenn $20 p$ größer als k ist, der erste Theil der Gleichung $(1{,}05)^t . (k - 20 p)$ negativ und also der Werth von q jährlich geringer werde, wenn man vom Kapital jährlich mehr aufnimmt als die Zinsen betragen und das Kapital zuletzt ganz verschwindet.

Z. B. Einer hat ein Kapital von 100000 Rthl. zu 5 Procent ausstehen und folglich ist seine jährliche Einnahme 5000 Rthl. Nun verzehrt er aber jährlich 6000 Rthl.; man fragt, in wie vielen Jahren das Kapital verschwin-

schwinden werde? oder man sucht t unter der Bedingung, daß $q = 0$ sey; also (§. 158.):

$$\begin{array}{r|l} 1 & (1{,}05)^t . (k - 20p) + 20p = 0 \\ 1 - 20p = 2 & (1{,}05)^t . (k - 20p) = - 20p \\ 2 : (k - 20p) = 3 & (1{,}05)^t = \frac{-20p}{k - 20p} \\ \text{Log. } 3 = 4 & t . \text{Log. } (1{,}05) = \text{Log. } \left(\frac{-20p}{k - 20p}\right) \\ 4 : \text{Log. } (1{,}05) = 5 & t = \text{Log. } \left(\frac{-20p}{k - 20p}\right) : \text{Log. } (1{,}05). \end{array}$$

Wird diese Gleichung auf das gegebene Beyspiel angewandt, so ist $k = 100000$, $p = 6000$ und $-20p = -120000$ rc, $k - 20p = 100000 - 120000 = -20000$ und also $\frac{-20p}{k - 20p} = \frac{-120000}{-20000} = +6$ und $t = \text{Log.} \left(\frac{-20p}{k - 20p}\right) : \text{Log.} (1{,}05) = \frac{\text{Log. } 6}{\text{Log. } (1{,}05)} = \frac{0{,}7781513}{0{,}0211893} = 36\frac{153465}{211893}$ Jahr oder 36 Jahr 264 Tage.

Achtes Kapitel.

Unbestimmte Aufgaben.

---

§. 159.

Bestimmte Aufgaben heißen solche, bey welchen man nach den Bedingungen der Aufgaben so viele

Gleichungen finden kann, als unbekannte Größen vorhanden sind. Ist nur Eine unbekannte Größe da, so ist auch nur Eine Gleichung erfoderlich (§. 24-40.); sind zwey unbekannte Größen vorhanden, so werden zwey und für drey unbekannte Größen drey Gleichungen erfodert u. s. w. (§. 41-54.). In solchen Fällen kann man den bestimmten und genauen Werth jeder unbekannten Größe in bloß bekannten und gegebenen Größen finden.

Eine unbestimmte Aufgabe (problema indeterminatum) ist eine solche, deren Bedingungen zu weniger Gleichungen leiten, als die Anzahl der unbekannten Größen beträgt; z. B. zu Einer Gleichung für zwey unbekannte Größen, zu zwey Gleichungen für drey unbekannte Größen, zu drey Gleichungen für vier unbekannte Größen u. s. w. **Mehr als unbestimmte Aufgaben** (plus quam indeterminatum) sind diejenigen, in denen die Anzahl der Gleichungen um mehrere Einheiten kleiner ist als die Menge der unbekannten Größen; z. B. für drey unbekannte Größen nur Eine Gleichung, oder für fünf unbekannte Größen nur zwey Gleichungen.

§. 160.

Erste Aufgabe. **Man soll zwey Zahlen x und y finden, so daß, wenn die erste mit 2 und die letzte mit 3 multiplicirt wird, die Summe ihrer Producte 8 beträgt.**

Ver-

Vermöge der Bedingung ist $2x + 3y = 8$, also $2x = 8 - 3y$ (§. 21.) und $x = \frac{8 - 3y}{2} = 4 - \frac{3y}{2}$ (§. 22.). Da nun nur Eine Gleichung gegeben ist, so kann man keinen Werth für y angeben. Man muß daher verschiedene Werthe für y annehmen, wodurch man verschiedene Werthe für x erhält. Ist also $y = 1$, so ist $x = 4 - \frac{3}{2} = \frac{8}{2} - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$; ist $y = 2$, so ist $x = 4 - \frac{6}{2} = \frac{8}{2} - \frac{6}{2} = \frac{2}{2} = 1$; ist $y = 3$, so ist $x = 4 - \frac{9}{2} = \frac{8}{2} - \frac{9}{2} = -\frac{1}{2}$; ist $y = 4$, so ist $x = 4 - \frac{12}{2} = \frac{8}{2} - \frac{12}{2} = -\frac{4}{2} = -2$. Nimmt man also für y eine ganze positive Zahl an, so wird man folgende Werthe für x finden:

Man nehme

$y = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ u. s. w.

so ist $x = 2\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, -2, -3\frac{1}{2}, -5, -6\frac{1}{2}, -8, -9\frac{1}{2}$ u. s. w.

Hieraus folgt:

1) Wenn man in einer unbestimmten Aufgabe für die eine unbestimmte Größe einen bestimmten ganzen oder gebrochenen, positiven oder negativen Werth annimmt, so findet man in jedem Fall einen andern Werth der zweyten unbekannten Größe.

2) Da nun für diese unbekannte Größe unzählig viele willkührliche Werthe angenommen wer-

werden können, so sind auch unzählig viele Auflösungen der Aufgabe theils in ganzen, theils in gebrochenen, theils in positiven, theils in negativen Zahlen möglich.

§. 161.

Zweyte Aufgabe. Man soll drey Zahlen x, y und z von der Beschaffenheit finden, daß ihre Unterschiede gleich groß sind und ihre Summe 105 beträgt.

Nach den Bedingungen der Aufgabe ist $x - y = y - z$ und $x + y + z = 105$. Nach der ersten Gleichung ist $2y = x + z$ oder $y = \frac{x + z}{2} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z$, welcher Werth von y in die andere Gleichung $x + y + z = 105$ gebracht $x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z + z = 105$ gibt und $\frac{3x + 3z}{2} = 105$ und wenn man mit 2 multiplicirt und durch 3 dividirt, so ist $x + z = \frac{2 \cdot 105}{3} = \frac{210}{3} = 70$. In die Gleichung $x + y + z = 105$ setze man $x + z = 70$, so ist $70 + y = 105$ und $y = 105 - 70 = 35$. Dies ist ein beständiger und unveränderlicher Werth für y; aber in der Gleichung $x + z = 70$ kann man weder x noch z fortschaffen, man muß daher für eine dieser Größen einen beliebigen Werth annehmen und wenn z eine ganze und positive Zahl seyn soll, so kann x nicht größer als

69

69 und nicht kleiner als 1 seyn, weil $x + z = 70$ ist; also gibt es für diese Aufgabe 69 Auflösungen in ganzen und positiven Zahlen; nämlich:

man nehme $x = 1, 2, 3, 4, 5 \ldots\ldots 69$
so ist $y = 35, 35, 35, 35, 35 \ldots\ldots 35$
und $x = 69, 68, 67, 66, 65 \ldots\ldots 1.$

§. 162.

Wenn die Auflösungen einer unbestimmten Aufgabe auf positive und ganze Zahlen eingeschränkt werden und alle Auflösungen in gebrochenen und negativen Zahlen wegfallen, so sind wenigstens in dieser Rücksicht die Auflösungen eingeschränkt und bestimmt, und eine solche Aufgabe heißt eine **halb bestimmte Aufgabe.** Es gibt gewisse analytische Kunstgriffe, wodurch man finden kann, welche und wie viele ganze und positive Zahlen die Aufgabe auflösen. Diese Regeln lassen sich am besten aus folgenden Aufgaben erlernen.

§. 163.

Dritte Aufgabe. **Man hat 864 Centner altes Kanonenmetall, aus welchem zweyerley Arten von Kanonen gegossen werden sollen. Die eine Art soll 5 Centner und die andere Art 12 Centner wiegen. Man fragt, wie viele Kanonen von jeder Gattung man gießen kann?**

Man nenne die erste Gattung von Kanonen $= x$, die andere $= y$, so ist das Gewicht aller Kanonen der ersten Gattung $= 5x$ Centner und das der zweyten $= 12y$; das Gewicht beyder zusammen soll der gegebenen Menge von Metall gleich seyn oder $5x + 12y = 864$; man bringe $12y$ auf die andere Seite und dividire die ganze Gleichung durch 5, so ist $x = \frac{864 - 12y}{5}$ Wenn man nun alle mögliche Werthe von x und y in ganzen und positiven Zahlen (wie die Natur der Aufgabe es nicht anders verstattet) bestimmen will, so dividire man wirklich durch 5, so ist $x = \frac{864 - 12y}{5} = 172 + \frac{4}{5} - 2y - \frac{2}{5}y = 172 - 2y + \frac{4 - 2y}{5} = 172 - 2y - \left(\frac{-4 + 2y}{5}\right)$. Nun ist 172 und 2y eine ganze Zahl; soll also auch x eine positive und ganze Zahl seyn, so muß auch $\frac{-4 + 2y}{5}$ eine ganze und positive Zahl $= h$ seyn; also $\frac{-4 + 2y}{5} = h$. Man kann hier sich den Kunstgriff merken, **daß man, um y positiv zu erhalten, alle Zeichen verändert hat.** Aus der Gleichung $\frac{-4 + 2y}{5} = h$ findet man, wenn man mit 5 multiplicirt, -4 auf die andere Seite bringt und durch 2 dividirt, $y = \frac{5h + 4}{2}$ und wenn man soweit als möglich durch 2 dividirt, $y =$

2h

$2h + \frac{h}{2} + 2$. Da nun 2 h und 2 ganze Zahlen sind, so muß auch $\frac{h}{2}$ eine ganze Zahl seyn, wenn y eine ganze Zahl seyn soll. Man nehme nun $\frac{h}{2} = h'$, wo h' eine zweyte ganze, aber von h verschiedene Zahl bedeutet, so ist $h = 2h'$. Hieraus kann man nun alle mögliche ganze und positive Werthe von x und y finden, wenn man zurückgeht und substituirt; nämlich:

$$y = \frac{5h + 4}{2} = \frac{10h' + 4}{2} = 5h' + 2$$

$$x = \frac{864 - 12y}{5} = \frac{864 - 12.(5h' + 2)}{5} = \frac{840 - 60h'}{5}$$

$$= 168 - 12h'.$$

Wenn in der Gleichung $x = 168 - 12h''$ $x = 0$ angenommen wird, so ist $0 = 168 - 12h'$ und $12h' = 168$ und $h' = \frac{168}{12} = 14$ und die Aufgabe läßt 14 Auflösungen zu, welche man findet, wenn man $h' = 0$, $h' = 1$, $h' = 2$, $h' = 3$ u. s. w. setzt. Es sey $h' = 3$, so ist $y = 5h' + 2 = 15 + 2 = 17$ und $x = 168 - 12h' = 168 - 36 = 132$.

Man										
setze h' =	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	...13.
so ist y =	2.	7.	12.	17.	22.	27.	32.	37.	42.	67.
und x =	168.	156.	144.	132.	120.	108.	96.	84.	72.	12.

§. 164.

Vierte Aufgabe. Ein Kaufmann ist einem andern 1200 Rthlr schuldig, welche Schuld er durch Lieferung zweyer Gattungen von Laken abtragen

gen will. Die eine Gattung kostet jede Elle 5 xl und die zweyte Gattung jede Elle 7 xl; wie viele Ellen $= x$ der ersten und wie viele Ellen $= y$ der zweyten Gattung muß er liefern, damit die Schuld getilgt werde?

Nach den Bedingungen der Aufgabe ist die Hauptgleichung $5x + 7y = 1200$ xl, woraus folgt, daß $y = \frac{1200 - 5x}{7}$ und wenn die Division wirklich verrichtet wird, $y = 171 + \frac{3}{7} - \frac{5x}{7}$ und, um zu verhindern, daß x negativ werde, ist $y = 171 - \left(\frac{-3+5x}{7}\right)$. Soll nun y eine ganze Zahl seyn, so muß auch $\frac{-3+5x}{7}$ eine ganze Zahl $= h$ seyn; also $-3 + 5x = 7h$ und $x = \frac{7h+3}{5}$ und wenn man die Division wirklich verrichtet, $x = \frac{5h}{5} + \frac{2h+3}{5}$ und wenn x eine ganze Zahl seyn soll, so muß auch $\frac{2h+3}{5}$ eine zweyte ganze Zahl $= h'$ seyn; also $2h + 3 = 5h'$ und $h = \frac{5h'-3}{2} = \frac{4h'}{2} + \frac{h'-3}{2}$. Da nun h eine ganze Zahl seyn soll und $\frac{4h'}{2}$ eine ganze Zahl ist, so muß auch $\frac{h'-3}{2}$ eine dritte ganze Zahl $= h''$ seyn; also $\frac{h'-3}{2} = h''$ und $h' = 2h'' + 3$; da nun h'' eine ganze

Zahl ist, so muß auch $2h'' - 3$ eine ganze Zahl seyn und man hat also nicht nöthig weiter zu gehen.

Man gehe nun wieder zurück und suche den Werth von h, x und y in h'' ausgedrückt. Nämlich $h = \frac{5h' - 3}{2} = \frac{5(2h'' + 3) - 3}{2} = \frac{10h'' + 15 - 3}{2} = 5h'' + 6$. Ferner $x = \frac{7h + 3}{5} = \frac{7(5h'' + 6) + 3}{5} = \frac{35h'' + 42 + 3}{5} = 7h'' + 9$. Endlich ist $y = \frac{1200 - 5x}{7} = \frac{1200 - 5(7h'' + 9)}{7} = \frac{1200 - 35h'' - 45}{7} = \frac{1155 - 35h''}{7} = 165 - 5h''$.

Aus dieser letzten Gleichung $y = 165 - 5h''$ schließt man, daß, wenn man y den kleinsten Werth $= 0$ gibt, so ist $165 = 5h''$ und $\frac{165}{5} = 33 = h$, d. h., wenn man mit 0 anfängt, so kann man h'' in ganzen und positiven Zahlen 33 Werthe von 0 bis 32 geben und eben so viele verschiedene Auflösungen läßt diese Aufgabe auf folgende Weise zu:

Man								
setze $h'' =$	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6....	32.
so ist $x =$	9.	16.	23.	30.	37.	44.	51....	233.
und $y =$	165.	160.	155.	150.	145.	140.	135....	5.

Ist z. B. $h'' = 3$, so ist $x = 7h'' + 9 = 21 + 9 = 30$ und $y = 165 - 5h'' = 165 - 15 = 150$.

§. 165.

§. 165.

Fünfte Aufgabe. Zu einem Ball bezahlt jede Mannsperson 24 mg und jedes Frauenzimmer 15 mg. Das, was für die Frauenzimmer bezahlt ist, beträgt in allen 3 mg mehr als das, was für die Mannspersonen bezahlt ist; man fragt, wie viele Mannspersonen und Frauenzimmer auf dem Ball waren?

Man nenne die Anzahl der Mannspersonen $= x$ und der Frauenzimmer $= y$, so haben die Mannspersonen $24x$ mg und die Frauenzimmer $15y$ mg bezahlt. Da nun die Frauenzimmer in allen 3 mg mehr bezahlt haben als die Mannspersonen, so muß man von $15y$ mg 3 mg abziehen, um das zu erhalten, was für die Mannspersonen bezahlt ist oder $24x = 15y - 3$, woraus folgt, daß $y = \frac{24x + 3}{15}$. Um kleinere Zahlen zu bekommen, verkürze man den Bruch durch die Division mit 3, so ist $y = \frac{8x + 1}{5} = \frac{5x}{5} + \frac{3x + 1}{5}$. Soll nun y eine ganze Zahl seyn, so muß auch, weil $\frac{5x}{5}$ eine ganze Zahl ist, der zweyte Theil $\frac{3x + 1}{5}$ eine ganze Zahl $= h$ seyn, also $x = \frac{5h - 1}{3} = \frac{3h}{3} + \frac{2h - 1}{3}$. Man sieht leicht, daß auch $\frac{2h - 1}{3}$ eine ganze Zahl seyn muß;

muß; also $\frac{2h-1}{3} = h'$, also $h = \frac{3h'+1}{2} = \frac{2h'}{2} + \frac{h'+1}{2}$. Folglich muß auch $\frac{h'+1}{2}$ eine ganze Zahl $= h''$ seyn, woraus endlich folgt, daß $h' = 2h'' - 1$ und da h'' für eine ganze positive Zahl angenommen wird, so muß auch $2h'' - 1$ eine ganze positive Zahl seyn und der erste Theil der Auflösung ist zu Ende gebracht.

Man gehe nun wieder zurück und drücke den Werth von h, x und y in h'' aus; nämlich $h = \frac{3h'+1}{2} = \frac{3(2h''-1)+1}{2} = \frac{6h''-3+1}{2} = 3h'' - 1$. Ferner $x = \frac{5h-1}{3} = \frac{5(3h''-1)-1}{3} = \frac{15h''-5-1}{3} = 5h'' - 2$. Endlich $y = \frac{8x+1}{5} = \frac{8.(5h''-2)+1}{5} = \frac{40h''-16+1}{5} = 8h'' - 3$.

Wenn man nun $h'' = 0$ annehmen wollte, so würde $x = -2$ und $y = -3$ werden; da man aber x und y nur in ganzen positiven Zahlen haben will, so kann h'' nicht $= 0$ gesetzt werden. Wollte man ferner $y = 0$ annehmen, um die Menge der Auflösungen zu bestimmen, so würde $h'' = \frac{3}{8}$ und also ein Bruch werden; da aber dies dem angenommenen Werth von h'' als einer ganzen Zahl widerspricht, so kann y nicht $=$ o seyn, daher sich auch die Anzahl der Auflösungen nicht be-

bestimmen läßt, sondern unendlich seyn muß. $h'' = 1$, so ist $x = 5h'' - 2 = 5 - 2 = 3$ und $y = 8h'' - 3 = 8 - 3 = 5$ und so kann man ferner folgende Auflösungen berechnen:

$h'' = 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.$ u. s. w.
$x = 3.\ 8.\ 13.\ 18.\ 23.\ 28.\ 33.\ 38.$ u. s. w.
$y = 5.\ 13.\ 21.\ 29.\ 37.\ 45.\ 53.\ 61.$ u. s. w.

§. 166.

Siebente Aufgabe. Von 33 Centner Pulver sollen 1200 Patronen zu 12- 8- und 3pfündigen Kanonen gefüllt werden. Jede 12pfündige Patrone wird mit 7 ℔, jede 8pfündige mit 5 ℔ und jede 3pfündige mit $1\frac{1}{2}$ ℔ gefüllt. Man fragt, wie viele Patronen von jeder Gattung können gefüllt und auf wie vielerley Weise kann dies bewirkt werden?

Man nenne die Anzahl der gesuchten 12pfündigen Patronen $= x$, der 8pfündigen $= y$, und der 3pfündigrn $= z$; das Gewicht derselben ist $7x$, $5y$, und $1\frac{1}{2}z = \frac{3z}{2}$ (§. 27. Arith.), aber dieses Gewicht soll 33 Centner betragen; also $7x + 5y + \frac{3z}{2} = 3300$. Wenn man $7x$ und $5y$ auf die andere Seite bringt, so ist $\frac{3z}{2} = 3300 - 7x - 5y$ und $z = \frac{6600 - 14x - 10y}{3}$.

Ferner ist die Anzahl der Patronen $= 1200$, woraus folgt, daß $x + y + z = 1200$ ist, und $z =$

$1200 - x - y$. Wenn man die Werthe von z gleich setzt, so ist $\frac{6600 - 14x - 10y}{3} = 1200 - x - y$.

Man multiplicire mit 3

$$6600 - 14x - 10y = 3600 - 3x - 3y$$
$$6600 - 3600 - 14x + 3x = 10y - 3y$$
$$3000 - 11x = 7y$$
$$\frac{3000 - 11x}{7} = y.$$

Wenn man nun die Division durch 7 wirklich verrichtet, so ist $y = 428 + \frac{4}{7} - x - \frac{4x}{7} = 428 - x + \frac{4 - 4x}{7} = 428 - x - \left(\frac{-4 + 4x}{7}\right)$.

Um nun alle mögliche Werthe in ganzen und positiven Zahlen zu finden, welche diese Aufgabe auflösen, so sieht man, daß, weil in der vorigen Gleichung 428 und x ganze Zahlen sind, auch $\frac{-4 + 4x}{7}$ eine ganze Zahl seyn müsse, wenn y eine ganze Zahl seyn soll. Man setze daher $\frac{-4 + 4x}{7} = h$, so ist $x = \frac{7h + 4}{4} = \frac{4h}{4} + \frac{3h + 4}{4}$; nun ist $\frac{4h}{4}$ eine ganze Zahl, also muß auch $\frac{3h + 4}{4} = h'$ eine andere ganze

Zahl seyn; folglich $h = \frac{4h' - 4}{3} = \frac{3h'}{3} + \frac{h' - 4}{3}$; also $\frac{h' - 4}{5} = h''$; also $h' = 3h'' + 4$. Da nun $3h'' + 4$ eine ganze Zahl ist, so hat man einen Werth erhalten, aus welchem man alle vorige ganze Zahlen finden kann, nämlich

$$h = \frac{4h' - 4}{3} = \frac{4(3h'' + 4) - 4}{3} = \frac{12h'' + 16 - 4}{3}$$
$$= 4h'' + 4.$$

$$x = \frac{7h + 4}{4} = \frac{7(4h'' + 4) + 4}{4} = \frac{28h'' + 28 + 4}{4}$$
$$= 7h'' + 8$$

$$y = \frac{3000 - 11x}{7} = \frac{3000 - 11(7h'' + 8)}{7} =$$
$$\frac{3000 - 77h'' - 88}{7} = \frac{2912 - 77h''}{7} = 416 - 11h''$$

$$z = 1200 - x - y = 1200 - 7h'' - 8 - 416$$
$$+ 11h'' = 786 + 4h''.$$

Wollte man nun in diesen Formeln h'' kleiner als -1 (etwa $h'' = -2$) annehmen, so würde man $x = 7h'' + 8 = -14 + 8 = -6$ und also negativ finden, welches gegen die Natur der Sache ist; wollte man aber h'' grösser als 37 (etwa $h'' = 38$) annehmen, so würde y negativ werden, nämlich $y = 416 - 11h = 416 - 418 = -2$, welches ebenfalls gegen die Bedingungen ist. Man ersieht daraus, daß die Werthe, welche man h'' geben kann, um ganze

und

und positive Werthe für x, y und z zu erhalten, zwischen — 1 und + 37 liegen, und daß also diese Aufgabe 39 Auflösungen auf folgende Weise zuläßt:

$h'' = -1.\ 0.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ \dots\ 37.$

$x = 1.\ 8.\ 15.\ 22.\ 29.\ 36.\ 43.\ \dots\ 267.$

$y = 427.\ 416.\ 405.\ 394.\ 383.\ 372.\ 361.\ \dots\ 9.$

$z = 772.\ 776.\ 780.\ 784.\ 788.\ 792.\ 796.\ \dots\ 924.$

§. 167.

Achte Aufgabe. **Unter 45 Arme sollen 200 Rthl. dergestallt vertheilt werden, daß ein Mann 8 Rthl., eine Frau 5 Rthl. und ein Kind 3 Rthl. erhält. Man fragt, wie viele Männer, Frauen und Kinder werden von diesen 200 Rthl. erhalten, und auf wie vielfältige Weise kann die Austheilung geschehen?**

Man nenne die Anzahl der Männer $= x$, der Frauen $= y$ und der Kinder $= z$; also ist $x + y + z = 45$ und $z = 45 - x - y$. Ferner erhalten alle Männer $= 8x$, alle Frauen $= 5y$, alle Kinder $= 3z$ Rthl., welche zusammen 200 Rthl. betragen, also $8x + 5y + 3z = 200$, woraus man $3z = 200 - 8x - 5y$ und $z = \frac{200 - 8x - 5y}{3}$ findet. Setzt man beyde Werthe von z gleich, so ist

$$\frac{200 - 8x - 5y}{3} = 45 - x - y.$$

Man multiplicire mit 3, so ist

$$200 - 8x - 5y = 135 - 3x - 3y$$
$$65 - 5x = 2y$$
$$\frac{65 - 5x}{2} = y$$

Um ganze und positive Werthe für x, y und z zu erhalten, verrichte man die Division durch 2 wirklich, so weit sie geschehen kann, so ist

$$y = \frac{65 - 5x}{2} = 32 + \tfrac{1}{2} - 2x - \tfrac{x}{2}$$

$$y = 32 - 2x - \left(\frac{-1 + x}{2}\right).$$

Soll nun y eine ganze Zahl seyn, so muß, weil 32 und 2 x ganze Zahlen sind, auch $\frac{-1+x}{2}$ eine ganze Zahl seyn, folglich $\frac{-1+x}{2} = h$ und $x = 2h + 1$, und da $2h + 1$ eine ganze Zahl seyn muß, so hat man nicht nöthig weiter zu gehen, sondern man kann nun nur gleich wieder zurückgehen, um die Werthe von x, y und z zu finden; nämlich

$$x = 2h + 1$$
$$y = \frac{65 - 5x}{2} = \frac{65 - 5(2h+1)}{2} = \frac{65 - 10h - 5}{2}$$
$$= 30 - 5h.$$
$$z = 45 - x - y = 45 - 2h - 1 - 30 + 5h$$
$$= 14 + 3h.$$

In

In Rücksicht der Menge der Auflösungen in ganzen und positiven Zahlen, so sieht man leicht, daß für h keine negative Zahl angenommen werden kann, weil dann x negativ werden würde. Es sey z. B. h = — 1, so ist x = — 2 + 1 = — 1; man kann hingegen a gerne = 0 setzen; denn das giebt keinen Unverstand, sondern x = 1, y = 30, z = 14 Wollte man aber h > 5 annehmen, so würde y entweder 0 oder negativ werden. Z. B. h = 6, so ist y = 30 — 30 = 0; h = 7, so ist y = 30 — 35 = — 5, woraus erhellet, daß, um Auflösungen in ganzen und positiven Zahlen hervorzubringen, h nur von 0 bis 5 angenommen werden dürfe, und die Aufgabe nur folgende 6 Auflösungen zulasse:

h =	0.	1.	2.	3.	4.	5.
x =	1.	3.	5.	7.	9.	11.
y =	30.	25.	20.	15.	10.	5.
z =	14.	17.	20.	23.	26.	29.

Anmerkung. Wenn man die § 163 — 167 gefundenen Auflösungen in ganzen und positiven Zahlen, und die verschiedenen Werthe der unbekannten Grössen x, y, z genauer ansieht, so wird man bemerken, daß in diesen Werthen eine gewisse Ordnung herrscht, und daß sie entweder steigende oder fallende arithmetische Progressionen sind, in denen sich der Unterschied der Glieder durch den Werth von

h' oder h'' bestimmt, deren Zahlcoefficienten derselbe gleich ist. Ferner ist die Progreßion steigend oder fallend, je nachdem h' oder h'' $+$ oder $-$ hat. Z. B. in §. 167 ist $x = 2h + 1$, und die Werthe von x bilden eine steigende arithmetische Progreßion, in der der Unterschied der Glieder $= 2$ ist, nämlich 1. 3. 5. 7. u. s. w. Ferner $y = 30 - 5h$ und die Werthe von y machen eine fallende arithmetische Progreßion aus, in der der Unterschied der Glieder $= 5$ ist; nämlich 30. 25. 20. 15. u. s. w. Endlich $z = 14 + 3h$ und die Werthe von z sind in einer steigenden arithmetischen Progreßion, in der der Unterschied der Glieder $= 3$ ist; nämlich: 14. 17. 20. 23. u. s. w.

§. 168.

Unbestimmte Aufgaben mit quadratischen Gleichungen sind schon schwerer; um indeß einen Begriff von der Art der Auflösung derselben zu geben, setze ich folgende Beyspiele her.

Neunte Aufgabe. Man soll zwey Zahlen, x und y, von der Beschaffenheit finden, daß, wenn man zum Quadrat der ersten $= x^2$ die zweyte Zahl y addirt, eine gleiche Summe her-

auskommt, als wenn man zum Quadrat der zweyten $= y^2$ die erste x addirt.

Nach den Bedingungen ist $x^2 + y = y^2 + x$ und $x^2 - y^2 = x - y$; aber $x^2 - y^2 = (x + y).(x - y)$ (§. 8.); also $(x + y).(x - y) = x - y$, und wenn man durch $x - y$ dividirt, ist $x + y = 1$ (§. 9.) und $x = 1 - y$.

Will man nun auch negative Werthe für x und y zulassen, so kann man für y jede beliebige Zahl setzen; z. B. $y = 4$, so ist $x = 1 - y = 1 - 4 = -3$ und $3^2 + 4 = 4^2 - 3 = 9 + 4 = 16 - 3 = 13$. Nimmt man y negativ $= -2$, so wird x positiv $= 1 - y = 1 - (-2) = 1 + 2 = 3$ und $-2^2 + 3 = 3^2 - 2 = 4 + 3 = 9 - 2 = 7$.

Verlangt man aber zur Auflösung der Aufgabe positive Grössen, so muß man $y < 1$ annehmen, d. h. y muß ein eigentlicher wirklicher Bruch seyn (§. 26. Arith.); z. B. $y = \frac{2}{5}$, so ist $x = 1 - y = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ (§41. Arith.) und also $x^2 + y = y^2 + x = \frac{9}{25} + \frac{2}{5} = \frac{9}{25} + \frac{10}{25} = \frac{19}{25} = \frac{4}{25} + \frac{3}{5} = \frac{4}{25} + \frac{15}{25} = \frac{19}{25}$; so wie die Bedingungen der Aufgabe es erfodern.

Hieraus ersieht man zugleich, daß, wenn x und y beyde ganze und positive Zahlen seyn sollen, die Aufgabe unmöglich ist.

§. 169.

Neunte Aufgabe. **Man soll zwey Quadratzahlen x^2 und y^2 finden, deren Summe einem dritten vollständigen Quadrate z^2 gleich ist.**

Die Gleichung ist $x^2 + y^2 = z^2$. Man nehme nun $z = m + y$ an, so ist $m^2 + 2my + y^2 = z^2$ (§. 8.) und $x^2 + y^2 = m^2 + 2my + y^2$; man subtrahire y^2, so ist $x^2 = m^2 + 2my$ und $x^2 - m^2 = 2my$ und $\frac{x^2 - m^2}{2m} = y$, woraus folgt, daß $z = m + y = m + \frac{x^2 - m^2}{2m} = \frac{2m^2 + x^2 - m^2}{2}$ $= \frac{x^2 + m^2}{2}$. Man kann nun für x und m Werthe annehmen, und daraus y und z bestimmen. Verlangt man, daß alle 3 Quadrate ganze Zahlen seyn sollen, so muß in obiger Gleichung für y und z der Nenner in den Zähler aufgehen, welches geschieht, wenn x ein Vielfaches (Multiplum oder Product) von m ist. Es sey $x = nm$, so ist $x^2 = n^2m^2$ und $\frac{x^2 + m^2}{2m} = \frac{n^2m^2 + m^2}{2m}$. Dann muß ferner $x + m$ eine gerade Zahl, oder theilbar durch 2 seyn, damit 2, welches man bey m im Nenner findet, gleichfalls in den Zähler aufgehen kann; denn wenn $2p$ eine gerade Zahl bedeutet, so ist deren Quadrat $4p^2$ auch eine gerade Zahl; wenn aber $2p + 1$ eine ungerade Zahl ist, so

ist

ist das Quadrat derselben $4p^2 + 4p + 1$ auch eine ungerade Zahl, und nicht durch 2 ohne Rest theilbar. Wenn man nun x und m nach diesen Bedingungen verschiedene Werthe giebt, so erhält man verschiedene Auflösungen. Nimmt man zuerst $m = 1$, so muß man x für eine ungerade Zahl annehmen, wenn $x + m$ eine gerade Zahl seyn soll; also muß man $x = 3$ oder $= 5$ oder $= 7$ u. s. w. annehmen. Dann wird $y = \frac{x^2 - m^2}{2m} = \frac{9 - 1}{2} = 4$ und $z = \frac{x^2 + m^2}{2m} = \frac{9 + 1}{2} = 5$. Auf eben die Art lassen sich die andern Werthe von x und z berechnen.

Man nehme m =	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	
und x =	3.	5.	7.	9.	11.	13.	15.	u. s. w.
y =	4.	12.	24.	40.	60.	84.	112.	u. s. w.
z =	5.	13.	25.	41.	61.	85.	113.	u. s. w.

Man nehme m =	2.	2.	2.	2.	2.	2.	2.	
und x =	4.	6.	8.	10.	12.	14.	16.	u. s. w.
y =	3,	8.	15.	24.	35.	48.	63.	
z =	5.	10.	17.	26.	37.	50.	65.	

Man nehme m =	3.	3.	3.	3.	3.	3.	3.	
und x =	9.	15.	21.	27.	33.	39.	45.	u. s. w.
y =	12.	36.	72.	120.	180.	252.	336.	
z =	15.	39.	75.	123.	183.	255.	339.	

§. 170.

Zehnte Aufgabe. Man soll zwey Zahlen x und y finden, deren Summe sich zur Summe ihrer Quadrate, wie a : b verhält.

Nach der Bedingung der Aufgabe ist $x + y : x^2 + y^2 = a : b$, und wenn man die äußern und mittlern Glieder multiplicirt, so ist $bx + by = ax^2 + ay^2$ (§. 78. Arith.). Diese Gleichung löse man nach den gewöhnlichen Regeln auf:

1	$bx + by = ax^2 + ay^2$
2	$-ay^2 + by = ax^2 - bx$ (§. 21.)
$2 : a = 3$	$\frac{-ay^2 + by}{a} = x^2 - \frac{bx}{a}$ (§. 22. 94.)
$3 + \frac{b^2}{4a^2} = 4$	$\frac{b^2}{4a^2} \frac{-ay^2 + by}{a} = x^2 - \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$ (§. 94.)
$\sqrt{4} = 5$	$\pm\sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2} \frac{-ay^2 + by}{a}\right)} = x - \frac{b}{2a}$
$5 + \frac{b}{2a} = 6$	$\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{4a^2} \frac{-ay^2 + by}{a}\right)} = x.$

Aus dieser Gleichung findet man x, wenn man einen Werth für y annimmt: aber dann kann es sich leicht zutragen, daß x irrational wird (§. 59.).

Um aber die Aufgabe in rationalen Zahlen aufzulösen, kann man annehmen, daß x ein Factor von y ist, so daß $y = mx$, welchen Werth man in die Hauptgleichung $bx + by = ax^2 + ay^2$ setzt, wodurch

durch man $bx + bmx = ax^2 + am^2x^2$ erhält. Diese Gleichung dividire man durch x, so ist $b + bm = ax + am^2x = (a + am^2)\,x$ und durch die Division mit $a + am^2$ findet man $x = \frac{b + bm}{a + am^2} = \frac{(1 + m)\,b}{(1 + m^2)\,a}$.

Wenn man nun für m eine beliebige rationale Zahl annimmt, so erhält man x in rationalen Zahlen und gleichfalls $y = mx$. Will man überdies noch x und y in ganzen Zahlen haben, so muß $b > a$ und der Zähler $(1 + m)\,b$ ohne Rest durch den Nenner $(1 + m^2)\,a$ theilbar seyn.

Man nehme z. B. $a : b = 1 : 4$ oder $a = 1, b = 4$. Man setze ferner $m = 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.$ u. s. w.

so ist $x = \frac{12}{5}.\ \frac{16}{10}.\ \frac{20}{17}.\ \frac{24}{26}.\ \frac{28}{37}.$

$y = \frac{24}{5}.\ \frac{48}{10}.\ \frac{80}{17}.\ \frac{120}{26}.\ \frac{168}{37}.$

Die ersten Werthe von x und y berechnet man so: $x = \frac{(1 + m)\,b}{(1 + m^2)\,a} = \frac{(1 + 2)\,4}{(1 + 4)\,1} = \frac{12}{5}$ und $y = mx = 2 . \frac{12}{5} = \frac{24}{5}$.

Ferner $a : b = 1 : 20$ oder $a = 1$ und $b = 20$. Man nehme $m = \frac{1}{4}.\ \frac{1}{2}.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.$ u. s. w.

so ist $x = \frac{400}{17}.\ 24.\ 40.\ 12.\ 6.\ \frac{100}{17}.\ \frac{120}{26}.$

$y = \frac{100}{17}.\ 12.\ 40.\ 24.\ 18.\ \frac{400}{17}.\ \frac{600}{20}.$

In Zahlen kann man die Auflösung prüfen. Z. B. wenn $m = 2$, $x = 12$ und $y = 24$, so ist 12 +

24

$24 : 12^2 + 24^2 = 1 : 20$ oder $36 : 144 + 567 = 1 : 20$ oder $36 : 720 = 1 : 20$.

§. 171.

Eilfte Aufgabe. Man soll zwey Zahlen von der Beschaffenheit finden, daß, wenn man zum Quadrat der einen x^2 das Product aus dem Quadrat der andern in eine gegebene Zahl $\pm a$ oder ay^2 addirt, die Summe ein vollständiges Quadrat $= b^2$ ist.

Nach den Bedingungen der Aufgabe ist $x^2 + ay^2 = b^2$, also $x^2 = b^2 - ay^2$ und wenn man die Quadratwurzel auszieht, $x = \sqrt{(b^2 - ay^2)}$. Nimmt man nun y beliebig an, so kann man x finden, welches aber nur dann eine rationale Zahl wird, wenn $b^2 - ay^2$ ein vollständiges Quadrat ist.

Will man nun die rationalen Werthe von x und y finden, so kann man $x = my - b$ annehmen, also $x^2 = m^2y^2 - 2mby + b^2$ und setzt man dies in die Hauptgleichung, so ist $m^2y^2 - 2mby + b^2 + ay^2 = b^2$. Man bringe $+ b^2$ und $- 2bmy$ auf die andere Seite, so ist $m^2y^2 + ay^2 = 2bmy$. Nun kann man die ganze Gleichung durch y dividiren, so hat man $m^2y + ay = 2\,bm$ oder $(m^2 + a)\,y = 2\,bm$ und wenn man durch $m^2 + a$ dividirt, so ist $\frac{2\,m\,b}{m^2 + a} = y$. Aber x ist $= my - b$;

b; wenn man also diesen gefundenen Werth von y substituirt, so ist $x = \frac{2m^2b}{m^2+a} - b = \frac{2m^2b - m^2b - ab}{m^2+a}$ $= \frac{m^2b - ab}{m^2+a} = \frac{(m^2 - a)b}{m^2+a}$. Wenn man nun m rational annimmt, so werden die Werthe von x und y gleichfalls rational und will man keine negative Zahlen haben, so muß man noch überdieß $m^2 > a$ annehmen.

Es sey $a = 2$, $b = 10$, $m = 3$, so ist $x = \frac{(m^2 - a)b}{m^2+a} = \frac{(9-2)10}{9+2} = \frac{70}{11}$ und $y = \frac{2bm}{m^2+a} = \frac{2.3.10}{9+2} = \frac{60}{11}$. Nimmt man nun $m = 4$, $= 5$, $= 6$ an, so erhält man folgende Werthe für x und y.

$m =$	3.	4.	5.	6.	u. s. w.
$x =$	$\frac{70}{11}$.	$\frac{140}{18}$.	$\frac{230}{27}$.	$\frac{340}{38}$.	u. s. w.
$y =$	$\frac{60}{11}$.	$\frac{80}{18}$.	$\frac{100}{27}$.	$\frac{120}{38}$.	u. s. w.

Will man die Richtigkeit der Auflösung mit den letzten Werthen $x = \frac{340}{38}$ und $y = \frac{120}{38}$ prüfen, so ist $x^2 + ay^2 = b^2$ oder $(\frac{340}{38})^2 + 2(\frac{120}{38})^2 = \frac{115600}{1444} + \frac{28800}{1444} = \frac{144400}{1444} = 100$, wie die Aufgabe es verlangt.

§. 172.

Zwölfte Aufgabe. **Man soll zwey Zahlen x und y von der Beschaffenheit finden, daß, wenn man vom Quadrat der ersten $= x^2$ das Quadrat**

drat der zweyten $= y^2$ multiplicirt mit einem gegebenen Quadrat $= b^2y^2$ subtrahirt, der Unterschied einer gegebenen Zahl $= a$ gleich ist.

Nach den Bedingungen ist $x^2 - b^2y^2 = a$, also $x^2 = a + b^2y^2$ und $x = \sqrt{(a + b^2y^2)}$.

Sollen x und y rationale Zahlen seyn, so muß man $x = m - by$ annehmen; also $x^2 = m^2 - 2bmy + b^2y^2$, welchen Werth man in die Gleichung $x^2 - b^2y^2 = a$ setzt, wodurch man $m^2 - 2bmy + b^2y^2 - b^2y^2 = a$ erhält oder $m^2 - 2bmy = a$ und $m^2 - a = 2bmy$ und $\frac{m^2 - a}{2bm} = y$. Um x zu finden, bringe man diesen Werth von y in die Gleichung $x = m - by$; also $x = m - \frac{bm^2 + ab}{2bm} = \frac{2bm^2 - bm^2 + ab}{2bm} = \frac{bm^2 + ab}{2bm} = \frac{m^2 + a}{2m}$. Z. B. $a = 2$, $b = 3$ und für m jede rationale Zahl.

Man nehme $m = 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.$ u. s. w.

so ist $x = \frac{6}{4}.\ \frac{11}{6}.\ \frac{18}{8}.\ \frac{27}{10}.\ \frac{38}{12} \ldots$

$y = \frac{2}{12}.\ \frac{7}{18}.\ \frac{14}{24}.\ \frac{23}{30}.\ \frac{34}{36} \ldots$

Will man mit $x = \frac{6}{4}$ und $y = \frac{2}{12}$ die Probe machen, so ist $x^2 = \frac{36}{16}$, $y^2 = \frac{4}{144}$, $b^2y^2 = 9\frac{4}{144}$; also $a = 2 = x^2 - b^2y^2 = \frac{36}{16} - 9\frac{4}{144} = \frac{36}{16} - \frac{36}{144} = \frac{9}{4} - \frac{9}{36} = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = \frac{8}{4} = 2$.

§. 173.

§. 97 und §. 168 sind Beyspiele von Aufgaben vorgekommen, deren Auflösung in ganzen und positiven Zahlen unmöglich ist. **Unmögliche Aufgaben** heissen solche, deren Auflösung unmöglich ist, d. h. in denen man für die unbekannten Größen keine solche Werthe finden kann, welche den Bedingungen der Aufgaben ein Genüge leisten. Unmögliche Aufgaben können entstehen, wenn die Bedingungen derselben sich widersprechen. Fällt auch dieser Widerspruch nicht gleich in die Augen, so zeigt er sich dennoch bey der endlichen Auflösung der Gleichungen, wenn diese nämlich irrationale, negative oder gebrochene Größen geben, wenn die gesuchten Größen doch, entweder, vermöge der Natur der Sache oder vermöge der Bedingungen, rationale, positive und ganze Zahlen seyn müssen. Leitet die Auflösung auf eine unmögliche Größe (§. 97.), so ist die Aufgabe gleichfalls unmöglich.

Erstes Beyspiel.

Man soll drey Zahlen x, y und z finden, so daß die Summe der ersten und zweyten $= 28$, die Summe der zweyten und dritten $= 30$ und die Differenz der ersten und dritten $= 15$ ist oder $x + y = 28$, $y + z = 30$ und $x - z = 15$. Von der zweyten Gleichung subtrahire man die ersten, so ist $z - x = 2$; diese Gleichung addire man zur dritten, so ist

$z - x + x - z = 15 + 2 = 17 = 0$. Da das aber unmöglich, nämlich 17 nicht $= 0$ seyn kann, so müssen die Bedingungen sich widersprechen und die Aufgabe unmöglich seyn.

Zweytes Beyspiel.

Einer kauft einige Ellen Laken $= x$ und bezahlt für jede Elle eben so viele Rthlr. als Ellen da sind; nun verkauft er das Laken wieder und bekommt doppelt so viele Rthlr. wieder als Ellen da sind und gewinnt bey diesem Handel 5 Rthlr.; man fragt, wie viele Ellen er gehabt habe?

Was er für das Laken ausgegeben hat, beträgt x^2 Rthlr.; wie er es aber wieder verkaufte, erhielt er $2x$ Rthlr. und dies ist 5 Rthlr. größer als der Einkaufspreis; also $x^2 = 2x - 5$ und $x^2 - 2x = -5$ und, wenn man das Quadrat ergänzet (§. 93.), $x^2 - 2x + 1 = 1 - 5 = -4$; also $x - 1 = \pm \sqrt{-4}$ und $x = 1 + \sqrt{-4}$; da aber $\sqrt{-4}$ eine unmögliche Größe ist (§. 78.), so ist auch die Aufgabe unmöglich.

Drittes Beyspiel.

In einem Zeughause befinden sich dreymal so viel Kanonen als Mörser, und nachdem man 5 Kanonen und 3 Mörser weggenommen hat, so bleiben nur zweymal so viel Kanonen als Mörser; man fragt nach der Anzahl der Kanonen und Mörser.

Die Anzahl der Mörser sey $= x$, so ist die Anzahl der Kanonen $= 3x$ und nachdem 5 Kanonen und 3 Mörser weggeführt sind, so ist die Anzahl der zurückgebliebenen Kanonen $= 3x - 5$ und der Mörser $= x - 3$. Erstere Zahl soll vermöge der Bedingung zweymal so groß seyn als letztere; also $3x - 5 = 2(x - 3) = 2x - 6$, also $3x - 2x = x = 5 - 6 = -1$. Da nun hier keine negative Zahl statt finden kann, so ist die Aufgabe unmöglich.

Viertes Beyspiel.

Eine Gesellschaft bestand aus 20 theils Manns- theils Frauenspersonen und es waren 5 Männer mehr als Frauen. Man fragt, aus wie vielen Männern und wie vielen Frauen die Gesellschaft bestanden habe?

Die Anzahl der Männer sey $= x$, der Frauen $= y$, so ist $x + y = 20$, und weil 5 Männer mehr als Frauen da waren, so ist $x - 5 = y$ und $x + x - 5 = 20$, oder $2x = 25$ und $x = 12\frac{1}{2}$ und $y = 7\frac{1}{2}$. Da es nun aber wohl keine Brüche von Menschen geben kann, so erfodert die Aufgabe eine Auflösung in ganzen Zahlen, und da es eine solche nicht gibt, so ist die Aufgabe unmöglich.

Fünftes Beyspiel.

Man soll zwey Zahlen x und y von der Beschaffenheit finden, daß die kleinere sich zur größern wie 2 :

7 verhält, oder $y : x = 2 : 7$ und die größere durch die kleinere dividirt zum Quotienten 10 giebt, oder $\frac{x}{y} = 10$. Aus der Proportion folgt, daß $7y = 2x$ oder $\frac{7y}{2} = x$ ist; aus der Gleichung folgt, daß $x = 10y$ ist; also $10y = \frac{7y}{2}$ oder $20y = 7y$, und durch die Division mit y bekommt man $20 = 7$, und da das eine Unmöglichkeit ist, so ist auch die Aufgabe unmöglich.

Zehntes Kapitel.

Von unendlichen Reihen.

§. 174.

Mehrere Größen, welche in einer gewissen Ordnung und nach einem bestimmten Gesetz auf einander folgen, machen eine **Reihe** (series) aus; z. B. die arithmetische Progression 2. 5. 8. 11. 14. u. s. w. und die geometrische Progression 2. 4. 8. 16. 32 u. s. w.

Das allgemeine Glied ist ein Ausdruck, welcher zeigt, wie jedes Glied aus der Natur der Reihe entsteht.

Das

Das summatorische Glied ist dasjenige, welches die Summe der ganzen Reihe ausdrückt. In einer arithmetischen Progression ist das summatorische Glied $= (a + u) \frac{1}{2} n$ (§ 132) $= an + \frac{1}{2} dn^2 - \frac{1}{2} dn$ (§. 134.) und in der geometrischen $= \frac{mu - a}{m - 1}$ (§. 145.) $= \frac{am - a}{m - 1}$ (§. 147.).

Figurirte Zahlen (numeri figurati) heißen solche, welche durch die Addition der Glieder einer arithmetischen Progression entstehen, wenn man zuerst mit 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, u. s. w. anfängt.

Erste Reihe.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Zweyte Reihe.	1.	3.	6.	10.	15.	21.	28.	36.	45.
Dritte Reihe.	1.	4.	10.	20.	35.	56.	84.	120.	165.
Vierte Reihe.	1.	5.	15.	35.	70.	126.	210.	330.	495.

In der zweyten Reihe entsteht 3 durch eine Addition von 1 und 2 in der ersten Reihe; eben so $6 = 1 + 2 + 3$ und $10 = 1 + 2 + 3 + 4$ u. s. w. In der dritten Reihe ist $4 = 1 + 3$ in der zweyten Reihe; in der vierten Reihe ist $5 = 1 + 4$ und $15 = 1 + 4 + 10$ und $35 = 1 + 4 + 10 + 20$ u. s. w. Von obenstehenden figurirten Zahlen heißen die Zahlen der zweyten Reihe die **dreyeckichten** oder **Triangular-Zahlen**; die Zahlen der dritten Reihe 1. 4. 10. 20. u. s. w. **Pyramidal-Zahlen**. Wenn in der arithmetischen Progression der Unterschied der Glieder,

welche addirt werden, $=2$ ist, so enthält die zweyte Reihe viereckichte oder Quadrat-Zahlen.

Arith. Progression.	1.	3.	5.	7.	9.	11.	13.	15.
Quadrat-Zahlen.	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.

Wenn in der arithmetischen Progression der Unterschied der Glieder $=3$ ist, so entstehen fünfeckichte oder Pentagonal-Zahlen.

Arith. Progression.	1.	4.	7.	10.	13.	16.	19.	22.
Pentagonal-Zahlen.	1.	5.	12.	22.	35.	51.	70.	92.

Wenn in der arithmetischen Progression der Unterschied der Glieder $=4$ ist, so entstehen sechseckichte oder Sexagonal-Zahlen.

Arith. Progression	1.	5.	9.	13.	17.	21.	25.	29.
Sexagon Zahlen.	1.	6.	15.	28.	45.	66.	91.	120.

Hieraus ersieht man schon, wie andere vieleckichte oder Polygonal-Zahlen entstehen können.

§. 175.

Eine abnehmende oder convergirende Reihe ist eine solche, in welcher jede folgende Größe kleiner ist, als die nächst vorhergehende; z. B. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$ oder $\frac{1}{5}=\frac{1}{3}-\frac{2}{9}+\frac{4}{27}-\frac{8}{81}+$ (§. 15) Eine zunehmende oder divergirende Reihe ist eine solche, in der jedes folgende Glied größer ist, als das nächst vorhergehende; z. B. $1+2+3+4+5$ oder $\frac{1}{5}=1-4+16-64+256-$ (§. 15.). Parallele Reihen heißen diejenigen, deren Glieder

weder

weder wachsen noch abnehmen; z. B. 1 — 1 + 1 — 1 + 1 — 1 u. s. w.

Eine endliche Reihe (series finita) ist eine solche, in welcher die Anzahl der Glieder endlich und bestimmt ist, z. B. eine geometrische Progression 1 + 2 + 4 + 8 + 16, oder die Pentagonal-Zahlen 1 + 5 + 12 + 22 + 35 + 51 + 70.

Eine unendliche Reihe (series infinita) ist diejenige, welche ohne Ende fortgesetzt wird, und in der die Anzahl der Glieder unendlich ist. Z. B. $\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{bc^2}{a^3} - \frac{bc^3}{a^4} +$ und so ohne Ende (§. 14.) oder $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ ohne Ende oder $\frac{1}{11} = \frac{1}{10} - \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} - \frac{1}{10000} +$ ohne Ende (§. 17.). Wenn eine convergirende oder abnehmende Reihe ohne Ende fortgesetzt wird, so werden die Glieder beständig kleiner und kleiner (§. 16) und zuletzt kleiner als jede angebliche endliche Größe, oder unendlich klein (§. 17. Arith.) In dieser Rücksicht verschwindet das letzte Glied, welches unendlich weit absteht, in Vergleich mit jeder endlichen Größe, und kann ohne merklichen Fehler weggeworfen werden.

§. 176.

Die Function einer Größe x ist jeder analytische und algebraische Ausdruck von x, wie derselbe

auch beschaffen seyn mag. Z. B. $a + 3x$, $ax - 4x$, $\sqrt{(a^2 - x^2)}$, $\frac{c}{a+x}$ sind Functionen von x.

Eine Function von $x = f$ läßt sich durch eine unendliche Reihe von dieser Form $f = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ u. s. w. ausdrücken, wo A, B, C, D, u. s. w. bis weiter unbestimmte Coefficienten bedeuten.

Weil A, B, C, D, u. s. w. unbestimmte Größen sind, so begreift man leicht die Möglichkeit, sie so zu bestimmen, daß sie so vereint, wie die Formel andeutet, einen Werth ausmachen müssen, welcher der gegebenen Function von x gleich ist. So ist vorhin bewiesen, daß $\frac{c}{a-b} = \frac{c}{a} + \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} + \frac{b^3c}{a^4} +$ u. s. w. ist (§. 14. Anmerk.). Nimmt man nun $b = x$, so folgt, daß $\frac{c}{a-x} = \frac{c}{a} + \frac{cx}{a^2} + \frac{cx^2}{a^3} + \frac{cx^3}{a^4}$ u. s. w.

Nimmt man nun ferner $\frac{c}{a} = A$, $\frac{c}{a^2} = B$, $\frac{c}{a^3} = C$, $\frac{c}{a^4} = D$, u. s. w. so wird die gegebene Function von x oder $\frac{c}{a-x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ u. s. w.

§. 177.

Wenn man eine Function von $x = f$ durch eine unendliche Reihe $f = A + Bx + Cx^2 +$

D

$Dx^3 + Ex^4$ u. s. w. ohne Ende ausdrückt, und $f = 0$ setzt, so müssen die unbestimmten Coefficienten A, B, C, D, E u. s. w. gleichfalls $= 0$ seyn.

Da x hier als eine veränderliche Größe angesehen wird, so kann sie verschiedene Werthe annehmen, und also auch $= 0$ gesetzt werden. Da aber vermöge der Bedingung $f = 0$ ist, so folgt, daß $A = 0$ ist; also bleibt von der Reihe nur $Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 +$ u. s. w. $= 0$ übrig. Wenn man nun durch x dividirt, so ist $B + Cx + Dx^2 + Ex^3 = 0$; ist nun $x = 0$, so muß auch $B = 0$ seyn; also bleibt nur $Cx + Dx^2 + Ex^3 = 0$ übrig, und wenn man durch x dividirt und $x = 0$ setzt, so sieht man, daß $C = 0$ ist. Auf eben dieselbe Art führt man den Beweis für die übrigen Coefficienten D, E, G, u. s. w.

Anmerkung. Dieser Satz ist sehr wichtig, und in der Anwendung sehr fruchtbar. Durch ihn kann man eine gegebene Function von x in eine unendliche Reihe verwandeln, und durch Näherung oder Approximation die Werthe von Brüchen, Wurzeln u. s. w. bestimmen, welches im folgenden in mehrern Beyspielen gewiesen werden soll.

§. 178.

Erste Aufgabe. Man soll den Bruch $\frac{a-x}{a+x}$ in eine unendliche Reihe verwandeln.

Man nehme an, eine unendliche Reihe von der allgemeinen Form sey der gegebenen gebrochenen Function gleich, oder $\frac{a-x}{a+x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$ (§. 176.), wo die Coefficienten beständig dieselben seyn sollen, welchen Werth man auch für x annehmen mag. Es kommt nun darauf an, diese Coefficienten A, B, C, D, u. s. w. zu bestimmen. Zu dem Ende multiplicire man die ganze Gleichung mit dem Nenner $a + x$, nämlich zuerst mit a und dann mit x, wobey man nur darauf sehen muß, daß man alle Producte, in welchen gleiche Potenzen von x vorkommen, gerade unter einander schreibt; also

$$\begin{aligned} a - x = aA + aBx &+ aCx^2 + aDx^3 + aEx^4 + \ldots \\ + Ax &+ Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots \end{aligned}$$

Diese Gleichung bringe man nun dadurch auf o, daß man $a - x$ mit entgegengesetzten Zeichen auf die andere Seite bringt.

$$\begin{aligned} o = aA &+ aBx + aCx^2 + aDx^3 + aEx^4 + \ldots \\ -a &+ Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots \\ &+ x \end{aligned}$$

Da nun alle Coefficienten $= o$ sind, so kann man auch annehmen, daß sie einander in der Ordnung aufheben, in welcher sie unter einander gesetzt sind; also $aA - a = o$, also $aA = a$, und wenn man durch a dividirt, $A = \frac{a}{a} = 1$. Um B zu finden, setze man

$aBx + Ax + x = 0$, und dividire allenthalben durch x, so ist $aB + A + 1 = 0$, und, wenn man $A = 1$ substituirt, $aB + 2 = 0$, also $aB = -2$ und $B = \frac{-2}{a}$.

Um C zu finden, setze man $aCx^2 + Bx^2 = 0$, und durch die Division mit x^2 ist $aC + B = 0$, und wenn man $B = \frac{-2}{a}$ substituirt, ist $aC - \frac{2}{a} = 0$ und $aC = \frac{2}{a}$ und $C = \frac{2}{a^2}$.

Um D zu bestimmen, setze man $aDx^3 + Cx^3 = 0$ oder $aD + C = 0$ oder, wenn man $C = \frac{2}{a^2}$ substituirt, $aD + \frac{2}{a^2} = 0$; also $aD = -\frac{2}{a^2}$ und $D = \frac{-2}{a^3}$.

Setzt man nun diese Werthe von A, B, C, D, E, u. s. w. in die allgemeine Formel der unendlichen Reihe $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 \ldots$, so findet man:

$$\frac{a-x}{a+x} = 1 - \frac{2x}{a} + \frac{2x^2}{a^2} - \frac{2x^3}{a^3} + \frac{2x^4}{a^4} - \ldots$$

§. 179.

Zweyte Aufgabe. Man soll den Bruch $\frac{a^2}{a^2 + 2ax - x^2}$ in eine unendliche Reihe verwandeln.

Man setze $\frac{a^2}{a^2 + 2ax - x^2} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$ und multiplicire auf beyden Seiten mit dem Nenner, so ist $a^2 = (a^2 + 2ax - x^2) \cdot (A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots)$. Diese Multiplication verrichtet man dadurch, daß man zuerst mit $+ a^2$, dann mit $+ 2ax$ und endlich mit $- x^2$ multiplicirt. Also:

$$\begin{aligned} a^2 = a^2 A + a^2 Bx + a^2 Cx^2 + a^2 Dx^3 + \ldots \\ + 2aAx + 2aBx^2 + 2aCx^3 + \ldots \\ - Ax^2 - Bx^3 - \ldots \end{aligned}$$

Das Ganze wird $= 0$, wenn man a^2 mit $-$ auf die andere Seite bringt, woraus folgt (§. 177.), daß $a^2 A - a^2 = 0$ oder $a^2 A = a^2$ und $A = \frac{a^2}{a^2} = 1$ ist. Ferner ist $a^2 Bx + 2aAx = 0$, also $a^2 B = - 2aA = - 2a$; also $B = \frac{-2a}{a^2} = \frac{-2}{a}$.

Ferner $a^2 Cx^2 + 2aBx^2 - Ax^2 = 0$ und, wenn man durch x^2 dividirt, so ist $a^2 C + 2aB - A = 0$ und, wenn man die Werthe von A und B substituirt, $a^2 C - \frac{4a}{a} - 1 = 0 = a^2 C - 5$; also $a^2 C = 5$ und $C = \frac{5}{a^2}$.

Um D zu finden, setze man $a^2 Dx^3 + 2aCx^3 - Bx^3 = 0$ oder $a^2 D + 2aC - B = 0$ oder $a^2 D + \frac{2 \cdot 5a}{a^2} + \frac{2}{a} = 0 = a^2 D + \frac{10a + 2a}{a^2} = a^2 D$

+

$+ \frac{12a}{a^2} = a^2D + \frac{12}{a}$; also $a^2 D = \frac{-12}{a}$ und $D = -\frac{12}{a^3}$ und wenn man diese Coefficienten in die Gleichung $\frac{a^2}{a^2 + 2ax - x^2} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$ setzt, so findet man

$$\frac{a^2}{a^2 + 2ax - x^2} = 1 - \frac{2x}{a} + \frac{5x^2}{a^2} - \frac{12x^3}{a^3} + \ldots$$

§. 180.

Dritte Aufgabe. Man soll den Bruch $\frac{1+2x}{1-x-x^2}$ in eine unendliche Reihe verwandeln.

Man nehme $\frac{1+2x}{1-x-x^2} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$ an, multiplicire mit $1 - x - x^2$ und mache alles $= 0$, indem man $1 + 2x$ mit entgegengesetzten Zeichen auf die andere Seite bringt.

$$\begin{aligned} 0 = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 \ldots \\ -1 - Ax - Bx^2 - Cx^3 - Dx^4 \ldots \\ -2x - Ax^2 - Bx^3 - Cx^4 \ldots \end{aligned}$$

Hieraus folgt, daß

$A - 1 = 0$ also $A = +1$

$B - A - 2 = 0 = B - 1 - 2 = B - 3$; $B = +3$

$C - B - A = 0 = C - 3 - 1 = C - 4$; $C = +4$

$D - C - B = 0 = D - 4 - 3 = D - 7$; $D = +7$

$E - D - C = 0 = E - 7 - 4 = D - 11$; $D = +11$

Wenn

Wenn man diese Werthe der Coefficienten A, B, C, u. s. w. substituirt, so findet man

$$\frac{1+2x}{1-x-x^2}=1+3x+4x^2+7x^3+11x^4 \text{ u. s. w.}$$

Diese Reihe hat die Eigenschaft, daß der Coefficient jedes Gliedes aus der Summe der Coefficienten der beyden vorhergehenden Glieder entsteht; der Coefficient von $4x^2$ ist $=1+3$, von $7x^3=3+4$, von $11x^4=7+4$. Solche Reihen heißen **zurücklaufende Reihen** (series recurrentes).

§. 181.

Vierte Aufgabe. **Man soll eine unendliche Reihe finden, welche der Quadratwurzel aus $a+x$ gleich ist.**

Man nehme an:

$$\sqrt{(a+x)}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\ldots$$

Man quadrire auf beyden Seiten, so ist

$$\begin{aligned} a+x=A^2+2ABx+B^2x^2&+2BCx^3+C^2x^4\\ +2ACx^2&+2ADx^3+2BDx^4\\ &+2AEx^4. \end{aligned}$$

Man bringe nun $a+x$ auf die andere Seite und mache dadurch die ganze Gleichung $=0$, so ist

$$\begin{aligned} 0=A^2+2ABx+B^2x^2&+2BCx^3+C^2x^4\\ -a-x\quad +2ACx^2&+2ADx^3+2BDx^4\\ &+2AEx^4. \end{aligned}$$

Man

Man kann nun den Werth der Coefficienten auf die gewöhnliche Weise finden; nämlich $A^2 - a = 0$, also $A^2 = a$ und $A = \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ (§. 65.).

Ferner $2ABx - x = 0$ und, wenn man durch x dividirt, $2AB - 1 = 0 = 2a^{\frac{1}{2}}B - 1$ und $B = \frac{1}{2a^{\frac{1}{2}}}$. Eben so $B^2 + 2AC = 0 = \frac{1}{4a} + 2a^{\frac{1}{2}}C$; also $2a^{\frac{1}{2}}C = -\frac{1}{4a}$ und $C = -\frac{1}{4a.2a^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2.4.a^{\frac{3}{2}}}$.

Ferner $2BC + 2AD = 0 = 2.\frac{1}{2a^{\frac{1}{2}}}.-\frac{1}{8a^{\frac{3}{2}}} + 2a^{\frac{1}{2}}D = -\frac{1}{8a^{\frac{4}{2}}} + 2a^{\frac{1}{2}}D$, also $\frac{1}{8a^{\frac{4}{2}}} = 2a^{\frac{1}{2}}D$ und wenn man durch $2a^{\frac{1}{2}}$ dividirt, so ist $D = \frac{1}{16a^{\frac{5}{2}}} = \frac{1.3}{2.4.6\,a^{\frac{5}{2}}}$. Aus $C^2 + 2BD + 2AE = 0$ findet man $E = -\frac{1.3.5}{2.4.6.8.a^{\frac{7}{2}}}$. Substituirt man also diese Werthe der Coefficienten, so ist

$$\sqrt{(a+x)} = a^{\frac{1}{2}} + \frac{x}{2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^2}{2.4.a^{\frac{3}{2}}} + \frac{1.3.x^3}{2.4.6.a^{\frac{5}{2}}} - \frac{1.3.5.x^4}{2.4.6.8.a^{\frac{7}{2}}} + \ldots\ldots$$

Oder,

Oder, wenn man dies auf eine andere Weise ausdrücken will (§. 68.), so ist:

$$\sqrt{(a+x)} = \sqrt{a} + \frac{x}{2\sqrt{a}} - \frac{x^2}{8\sqrt{a^3}} + \frac{x^3}{16\sqrt{a^5}} - \frac{5 \cdot x^4}{128\sqrt{a^7}} + \ldots$$

Diese unendliche Reihe läßt sich zur Ausziehung von Quadratwurzeln aus Zahlen, z. B. aus 101, anwenden. Man muß die Zahl in zwey Theile zerlegen, deren einer a eine Quadratzahl ist. Wenn man $a < x$ und also $a = 1$ und $x = 100$ annimmt oder $a + x = 1 + 100$, so wird man finden:

$$\sqrt{(1+100)} = 1 + \tfrac{100}{2} - \tfrac{10000}{8} + \tfrac{1000000}{16} - \ldots$$

Diese unendliche Reihe ist divergirend (§. 175.) und kann hier nicht gebraucht werden; also muß man $a > x$ und $a = 100$ und $x = 1$ annehmen, so wird die unendliche Reihe convergirend.

$$\sqrt{(100+1)} = \sqrt{100} + \frac{1}{2.\sqrt{100}} - \frac{1}{8.\sqrt{1000000}} +$$
$$= 10 + \tfrac{1}{20} - \tfrac{1}{8000} + \ldots$$
$$= 10 + 0{,}050000 - 0{,}000125$$
$$= 10 + 0{,}049875$$
$$= 10{,}049875.$$

Diese Quadratwurzel von $101 = 10{,}049875$ ist durch diese drey Glieder bis zu Milliontheilen zuverlässig, wovon man sich überzeugen kann, wenn man auf die gewöhnliche Weise (§. 65. Arith.) die Qua-

drat-

dratwurzel auszieht. Je größer man a in Vergleichung mit x nimmt, desto schneller convergirt die Reihe und desto weniger Glieder hat man nöthig; je näher aber a und x einander kommen, desto langsamer convergirt die Reihe und desto mehr Glieder muß man berechnen, um dieselbe Genauigkeit zu erhalten. Hätte man z. B. $\sqrt{101} = \sqrt{(81 + 20)}$ oder $a = 81$ und $x = 20$ angenommen, so wäre

$$\sqrt{(81 + 20)} = \sqrt{81} + \frac{20}{2\sqrt{81}} - \frac{400}{8\sqrt{531441}} + \ldots$$
$$= 9 + \tfrac{20}{18} - \frac{400}{5813{,}2} + \ldots$$
$$= 9 + 1{,}1111 - 0{,}0686 + \ldots$$
$$= 10{,}0425.$$

Die beyden ersten Glieder geben die Wurzel $= 9 + 1{,}1111 = 10{,}1111$ und also zu groß; subtrahirt man hievon das dritte Glied $= 0{,}0686$, so ist die Wurzel $= 10{,}0425$, welcher hier in zwey Decimalstellen, oder in Zehn- und Hunderttheilen, zuverläßig aber doch etwas zu klein ist. Will man nun noch das vierte Glied $= + \frac{x^3}{16\sqrt{a^5}}$ berechnen, so wird die Wurzel etwas zu groß, und wenn man noch das fünfte Glied $= - \frac{5x^4}{128\sqrt{a^7}}$ hinzu nimmt, etwas zu klein werden, und so wird man durch mehrere Glieder der Wurzel immer näher kommen.

Auf

Auf eben die Art, wie hier erklärt ist, kann man für $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ eine unendliche Reihe finden; nämlich $\sqrt{(a^2 - x^2)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{2.4.a^3} - \frac{1.3.x^6}{2.4.6.a^5} - \frac{1.3.5.x^8}{2.4.6.8a^7} \ldots$ wenn man $\sqrt{(a^2 - x^2)} = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + Ex^8 + \ldots$ genommen hätte.

§. 182.

So wie eine **steigende geometrische Progression** entsteht, wenn man das erste Glied $= a$ mit dem Namen des Verhältnisses $= m$ multiplicirt (§. 140.), so entsteht auch eine **fallende geometrische Progression**, wenn man durch m dividirt, und die allgemeine Form derselben ist:

$$\begin{matrix} 1. & 2. & 3. & 4. & 5. & 6. & \ldots & n. \\ a. & \frac{a}{m}. & \frac{a}{m^2}. & \frac{a}{m^3}. & \frac{a}{m^4}. & \frac{a}{m^5} & \ldots & \frac{a}{m^{n-1}} = u. \end{matrix}$$

Das letzte oder nte Glied oder das **allgemeine Glied** u ist $= \frac{a}{m^{n-1}}$ (§. 141.). **Die Summe oder das summatorische Glied einer fallenden endlichen geometrischen Progression** oder S ist $= \frac{am - u}{m - 1}$.

Weil

Weil alle Glieder in einer stetigen geometrischen Proportion sind (§. 73. Arith.), so kann man sie auch auf folgende Weise ordnen:

$$a : \frac{a}{m}$$
$$\frac{a}{m} : \frac{a}{m^2}$$
$$\frac{a}{m^2} : \frac{a}{m^3}$$
$$\frac{a}{m^3} : u$$

$$a + \frac{a}{m} + \frac{a}{m^2} + \frac{a}{m^3} : \frac{a}{m} + \frac{a}{m^2} + \frac{a}{m^3} + u = a : \frac{a}{m}$$

(§. 86. Arith.) $= 1 : \frac{1}{m}$ (§. 74. Arith.). Man ersieht daraus, daß die Summe aller Vorderglieder die Summe der ganzen Progression außer dem letzten Gliede oder $= s - u$ und die Summe aller Hinterglieder die Summe der ganzen Progression außer dem ersten Gliede oder $= s - a$ ist; also $s - u : s - a = 1 : \frac{1}{m}$ und $s - a = \frac{s - u}{m}$ und wenn man mit m multiplicirt, $ms - ma = s - u$ und $ms - s = am - u$ und $s(m - 1) = am - u$ und $s = \frac{am - u}{m - 1}$. Z. B. Die Reihe sey $= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$, so ist $a = 1$, $m = 2$, $u = \frac{1}{8}$ und $s = \frac{2 - \frac{1}{8}}{2 - 1} = 1\frac{7}{8}$.

 §. 183.

§. 183.

Wird obige fallende geometrische Progression ohne Ende fortgesetzt, so ist ihre Summe $s = \frac{am}{m-1}$.

In diesem Fall wird die Anzahl der Glieder oder n unendlich und das letzte Glied $u = \frac{a}{m^{n-1}}$ (§. 182.) eine endliche Größe a dividirt durch eine unendliche Potenz von m oder durch eine unendlich große Zahl; u wird also eine unendlich kleine Größe (§. 22. Arith.) und kann in Vergleichung mit einer endlichen Größe ohne merklichen Fehler weggeworfen werden (§. 175.); folglich darf man in der oben gefundenen Formel $s = \frac{am - u}{m - 1}$ das letzte Glied u gegen am wegwerfen und also ist $s = \frac{am}{m-1}$.

Z. B. Man soll die unendliche Reihe $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$ summiren. Hier ist $a = \frac{1}{2}$, $m = 2$ und $s = \frac{2}{2} : 2 - 1 = \frac{1}{1} = 1$. Eben so $\frac{2}{5} + \frac{2}{15} + \frac{2}{45} + \frac{2}{135} + \ldots$, wo $a = \frac{2}{5}$, $m = 3$; also $s = \frac{6}{5} : 2 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Auf eben die Art $0{,}9999 = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \ldots$; hier ist $a = \frac{9}{10}$, $m = 10$ und $s = \frac{90}{10} : 9 = \frac{90}{90} = 1$.

Ist

Ist der periodische Decimalbruch 0,181818 .... ohne Ende gegeben, so ist $a = \frac{18}{100}$, $m = 100$ und $s = \frac{1800}{100} : 99 = \frac{1800}{9900} = \frac{2}{11}$.

Es sey ein anderer periodischer Decimalbruch 0,142857142857 ... ohne Ende gegeben, so nehme man $a = \frac{142857}{1000000}$ und $m = 1000000$, so ist $s = \frac{142857000000}{1000000} : 999999 = \frac{142857000000}{999999000000} = \frac{1}{7}$, so wie er auch durch die gewöhnliche Rechnung gefunden wird (§. 55. Arith.).

Anmerk. Wenn man, statt das erste Glied $= a$ anzunehmen, dasselbe $= \frac{a}{b}$ einem Bruche setzt, so ist die Progression:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{bm} \cdot \frac{a}{bm^2} \cdot \frac{a}{bm^3} \cdot \frac{a}{bm^4} \text{ u. s. w.}$$

Die Summe dieser Progression findet man, wenn man in die Formel $s = \frac{am}{m-1}$ statt a nun $\frac{a}{b}$ substituirt; also $s = \frac{am}{b} : (m-1) = \frac{am}{b} \cdot \frac{1}{m-1}$ (§. 46. Arith.) $= \frac{am}{bm-b}$ (§. 42. Arith.).

§. 184.

Fünfte Aufgabe. **Man soll eine unendliche Reihe von Brüchen summiren, deren Zähler in einer arithmetischen und deren Nenner in einer geometrischen Progression sind.**

Solche Brüche kann man durch folgende Formel bezeichnen (§. 126. 140.):

$$\frac{a}{b}+\frac{a+d}{bm}+\frac{a+2d}{bm^2}+\frac{a+3d}{bm^3}+\frac{a+4d}{bm^4}+\ldots$$

Diese Reihe läßt sich auch auf die Art ausdrücken, daß man jedes Glied derselben in zwey Theile theilt; denn $\frac{a+d}{bm}=\frac{a}{bm}+\frac{d}{bm}$; $\frac{a+2d}{bm^2}=\frac{a}{bm^2}+\frac{2d}{bm^2}$ u. s. w. Also entsteht nun folgende Reihe:

$$\frac{a}{b}+\frac{a}{bm}+\frac{d}{bm}+\frac{a}{bm^2}+\frac{2d}{bm^2}+\frac{a}{bm^3}+\frac{3d}{bm^3}+\frac{a}{bm^4}+\frac{4d}{bm^4}+\ldots$$

Diese dergestalt veränderte Reihe läßt sich wieder in folgende unendliche geometrische Progressionen zerlegen, welche man nach §. 183. summirt.

$$\frac{a}{b}+\frac{a}{bm}+\frac{a}{bm^2}+\frac{a}{bm^3}+\frac{a}{bm^4}\ldots=\frac{am}{bm-b}$$

$$\frac{d}{bm}+\frac{d}{bm^2}+\frac{d}{bm^3}+\frac{d}{bm^4}=\frac{d}{bm-b}$$

$$\frac{d}{bm^2}+\frac{d}{bm^3}+\frac{d}{bm^4}=\frac{d}{bm^2-bm}$$

$$\frac{d}{bm^3}+\frac{d}{bm^4}=\frac{d}{bm^3-bm^2}$$

$$\frac{d}{bm^4}=\frac{d}{bm^4-bm^3}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{a+d}{bm}+\frac{a+2d}{bm^2}+\frac{a+3d}{bm^3}+\frac{a+4d}{bm^4}.$$

Die

Die gegebene Reihe ist also so groß als die rechter Hand stehenden Summen von Reihen. Diese Summen machen, wenn man die erste ausnimmt, eine geometrische Progression: $\frac{d}{bm - b} + \frac{d}{bm^2 - bm} + \frac{d}{bm^3 - bm^2} + \frac{d}{bm^4 - bm^3} + \ldots$ und die Summe dieser Progression findet man nach der Formel $s = \frac{am}{m - 1}$ (§. 183.) $= a . \frac{m}{m - 1}$. Hier ist das erste Glied $= \frac{d}{bm - b}$ und $m = m$; also $s = \frac{d}{bm - b} . \frac{m}{m - 1}$ $= \frac{dm}{bm^2 - 2bm + b}$. Also ist die Summe einer unendlichen Reihe von Brüchen, deren Zähler in einer arithmetischen und deren Nenner in einer geometrischen Progression fortgehen, nämlich $\frac{a}{b} + \frac{a + d}{bm} + \frac{a + 2d}{bm^2}$ $+ \frac{a + 3d}{bm^3} + \ldots = \frac{am}{bm - b} + \frac{dm}{bm^2 - 2bm + b}$. Bringt man diese beyden Brüche auf gleiche Benennung und addirt sie (§ 11.), so ist diese Summe $=$

$$\frac{abm^3 - 2abm^2 + abm + bdm^2 - bdm}{b^2m^3 - 2b^2m^2 + b^2m - b^2m^2 + 2b^2m - b^2}$$

Dieser Bruch läßt sich abkürzen, wenn man Zähler und Nenner durch $bm - b$ dividirt; also

$$\frac{a}{b} + \frac{a + d}{bm} + \frac{a + 2d}{bm^2} + \frac{a + 3d}{bm^3} + \ldots = s =$$

$$\frac{am^2 - am + dm}{bm^2 - 2bm + b}.$$

z. B. Es sey die gegebene unendliche Reihe
$\frac{2}{5} + \frac{4}{15} + \frac{6}{45} + \frac{8}{135} + \frac{10}{405} + \ldots\ldots = s$,
so ist $a = 2$, $b = 5$, $d = 2$, $m = 3$ und die Summe dieser unendlichen Reihe oder $s = \frac{2.9 - 2.3 + 2.3}{5.9 - 10.3 + 5}$ $= \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$.

§. 185.

Eine Reihe, z. B. $x = ay + by^2 + cy^3 + dy^4$ ---- **umkehren oder invertiren**, heißt den Werth von y durch eine unendliche Reihe von x finden. Die Engländer nennen dies auch eine Reihe revertiren, oder ihre Wurzel ausziehen. (A Treatise of Algebra by W. Emerson, London 1764 p. 171.)

§. 186.

Sechste Aufgabe. **Man soll eine unendliche Reihe invertiren, in der die Potenzen nach der Ordnung der natürlichen Zahlen fortgehen; z. B. $x = ay + by^2 + cy^3 + dy^4$ ----**

Man nehme an, die unendliche Reihe, welche den Werth von y durch x ausdrücken soll, sey

$$y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 \text{ u. s. w.}$$

Da in der gegebenen Reihe y^2, y^3, y^4, u. s. w. vorkommen, so muß man den Werth dieses Quadrats, dieses Kubus u. s. w. angeben, indem man die ganze Reihe $Ax + Bx^2 + Cx^3$ u. s. quadrirt, kubirt u. s. w. (§. 8). Also findet man

y^2

$$y^2 = A^2x^2 + 2ABx^3 + B^2x^4 \ldots$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad + 2ACx^4 \ldots$$
$$y^3 = \qquad A^3x^3 + 3A^2Bx^4 \ldots$$
$$y^4 = \qquad\qquad A^4x^4 \ldots$$

Wenn man diese Werthe von y, y^2, y^3 u. s. w. in die Gleichung $x = ay + by^2 + cy^3 + dy^4$ u. s. w. setzt, so ist

$$x = \begin{cases} ay = aAx + aBx^2 + aCx^3 + aDx^4 \ldots \\ by^2 = \quad bA^2x^2 + 2bABx^3 + bB^2x^4 \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + 2bACx^4 \ldots \\ cy^3 = \qquad cA^3x^3 + 3cA^2Bx^4 \ldots \\ dy^4 = \qquad\qquad dA^4x^4 \ldots \end{cases}$$

Den Werth der Coefficienten findet man auf die vorhin erklärte Weise (§. 177. 178.); nämlich $aAx - x = 0$, oder $aAx = x$ und $aA = 1$ und $A = \frac{1}{a}$; ferner $aB + bA^2 = 0$ und $aB = -bA^2 = -b.\frac{1}{a^2} = -\frac{b}{a^2}$ und also $B = -\frac{b}{a^3}$. Ferner ist $aC + 2bAB + cA^3 = 0$ oder $aC = -2bAB - cA^3 = -2b.\frac{1}{a}.-\frac{b}{a^3} - c.\frac{1}{a^3} = \frac{2b^2}{a^4} - \frac{ac}{a^4} = \frac{2b^2 - ac}{a^4}$ und wenn man durch a dividirt, so ist $C = \frac{2b^2 - ac}{a^5}$. Aus $aD + bB^2 + 2bAC + 3cA^2B + dA^4 = 0$ findet man $D = -\frac{5b^3 + 5abc - a^2d}{a^7}$. Setzt man endlich diese Werthe der Coefficienten in

 die

die Reihe $y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4$ u. s. w. so findet man $y = \frac{x}{a} - \frac{bx^2}{a^3} + \frac{(2b^2 - ac)}{a^5} x^3 - \frac{(5abc - a^2d - 5b^3)}{a^7} x^4 + \frac{(14b^4 - 21ab^2c + 6a^2bd + 3a^2c^2 - a^3e)}{a^9} x^5$.

Erstes Beyspiel.

$x = y - y^2 + y^3 - y^4 + y^5 - y^6$ u. s. w.

Man fragt nach dem Werthe von y durch eine Reihe von x ausgedrückt. Vergleicht man die gegebene Reihe mit der allgemeinen, so ist $a = 1, b = -1, c = +1, d = -1$ u. s. w.; also $y = x + x^2 + x^3 + x^4 +$ u. s. w.

Zweytes Beyspiel.

Man will folgende Reihe invertiren: $x = y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ u. s. w.; also $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{3}$, $d = \frac{1}{4}$ u. s. w.; folglich $y = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 - \ldots = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} - \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \ldots$

Drittes Beyspiel.

Man soll $z = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \frac{x^5}{5a^5} - \ldots$ invertiren, so ist $a = \frac{1}{a}$; $b = -\frac{1}{2a^2}$; $c = +\frac{1}{3a^3}$; $d = -\frac{1}{4a^4}$; $e = +\frac{1}{5a^5}$, woraus man $x = az + \frac{az^2}{2} + \frac{az^3}{2.3} + \frac{az^4}{2.3.4} + \ldots$

§. 187.

Siebente Aufgabe. Man soll eine unendliche Reihe $x = ay + by^3 + cy^5 + dy^7$ u. s. w., in der die Exponenten wie die ungeraden Zahlen wachsen, invertiren.

Man nehme $y = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + \dots$, woraus folgt, daß

$$\begin{aligned} y^3 &= A^3x^3 + 3A^2Bx^5 + 3A^2Cx^7 \dots \\ &\qquad\qquad + 3AB^2x^7 \dots \\ y^5 &= A^5x^5 + 5A^4Bx^7 \dots \\ y^7 &= A^7x^7 \dots \end{aligned}$$

woraus aufs neue folgt, daß

$$x = \begin{cases} ay = aAx + aBx^3 + aCx^5 + aDx^7 + \dots \\ by^3 = bA^3x^3 + 3A^2Bbx^5 + 3bA^2Cx^7 \dots \\ \qquad + 3bAB^2x^7 \dots \\ cy^5 = cA^5x^5 + 5cA^4Bx^7 \dots \\ dy^7 = dA^7x^7 \dots \end{cases}$$

woraus folgt, daß $x = aAx$ und $A = \frac{1}{a}$; ferner $aBx^3 + bA^3x^3 = 0$, woraus $B = \frac{-b}{a^4}$ folgt; eben so $aCx^5 + 3A^2Bbx^5 + cA^5x^5 = 0$, woraus man $C = \frac{3b^2 - ac}{a^7}$ findet; ferner ist $D = \frac{8abc - a^2d - 12b^3}{a^{10}}$

woraus endlich folgt, daß $y = \frac{x}{a} - \frac{bx^3}{a^4} + \frac{(3b^2 - ac)}{a^7} x^5 + \frac{(8abc - a^2d - 12b^3)}{a^{10}} x^7 + \dots$

Wenn man die Reihe $t = z - \frac{z^3}{2.3.d^2} + \frac{z^5}{2.3.4.5.d^4} - \frac{z^7}{2.3.4.5.6.7.d^6} + \ldots$ invertiren will, und sie mit $x = ay + by^3 + cy^4 + dy^7 + \ldots$ vergleicht, so ist $x = t$, $y = z$, $a = 1$, $b = -\frac{1}{2.3.d^2}$, $c = \frac{1}{2.3.4.5.d^4}$ u. s. w., woraus folgt, daß $z = t + \frac{t^3}{2.3.d^2} + \left(\frac{1}{3.4d^4} - \frac{1}{2.3.4.5.d^4}\right) t^5 + \left(+\frac{1}{2.3.4.5.d^5} + \frac{1}{2.3.4.5.6.7.d^6} + \frac{1}{2.3.5.d^6}\right) t^7 + \ldots = t + \frac{t^3}{2.3.d^2} + \frac{3t^5}{2.4.5.d^4} + \frac{3.5.t^7}{2.4.6.7.d^6} + \ldots$.

Anmerkung. Hier konnten über die unendlichen Reihen nur kürzlich die wichtigsten Sätze, welche zur deutlichen Einsicht in die Beschaffenheit der hyperbolischen Logarithmen und in Newtons Binomial-Theorem unumgänglich nöthig sind, abgehandelt werden. Wünscht man über diese wichtige Lehre sich mehrere Aufklärung zu verschaffen, so kann man solche in nachstehenden Schriften finden: Cours complet de Mathematiques par l'Abbé Sauri. Paris 1774. Tom. I. p. 293 — 340.

340. C. Scherffer institutionum analyticarum. Pars I. Viennæ 1770. p. 123 — 148. Holliday an introduction to fluxions. London 1777. p. 12 — 73. Unterricht in der math. Analysis, von Johann Pasquich. Leipzig 1790. 1r Band, p. 387 — 415 und p. 435 — 503. L. Euleri introductio in analysin infinitorum. Lausan. 1748. Tom. I. Cap. 4. 13. 15. 17. 18. A Treatise concerning summation and interpolation of infinite series by J. Stirling. London 1749. Mathematical dissertations by Th. Simpson. London 1743. p. 62 — 103.

Eilftes Kapitel.

Hyperbolische Logarithmen und Newtons Binomial-Formel.

§. 188.

Die briggischen Logarithmen sind in der Arithmetik erklärt worden (§. 108. — 126.), und vorhin haben wir in der Algebra ihre Anwendung zur Auflösung der Gleichungen berührt (§. 105. — 123.); hier wollen wir

wir die Theorie der Logarithmen im Allgemeinen und die Berechnung derselben durch unendliche Reihen erklären; eine Methode, die weit kürzer und leichter ist, als die in der Arithmetik abgehandelte (§. 112. Arith.).

§. 189.

Aufgabe. **Man soll den Logarithmen jeder gegebenen Zahl finden.** Jede ganze Zahl läßt sich durch $1 + x$ ausdrücken, und $1 + x$ wieder durch eine unendliche Reihe. Soll nun $1 + x = 1$ seyn, so ist $x = 0$ und $1 + x = 1 + 0$; nun ist aber $\log. 1 = 0$, also muß die unendliche Reihe, welche den Logarithmen von $1 + x$ angibt, in diesem Fall auch $= 0$ seyn. Da sie das aber nicht werden kann, wenn nicht x in allen Gliedern sich befindet, so muß man aus dieser Ursache $\log. (1+x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \ldots$ annehmen. Auf eben die Art kann man annehmen $\log. (1+y) = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5 + \ldots$

Um die Coefficienten zu bestimmen, kann man $(1+x)^2 = 1+y$ oder $1+2x+x^2 = 1+y$ annehmen, woraus folgt, daß

$$
\begin{aligned}
y &= 2x + x^2 \\
y^2 &= \quad + 4x^2 + 4x^3 + x^4 \\
y^3 &= \quad\quad + 8x^3 + 12x^4 \ldots \\
y^4 &= \quad\quad\quad + 16x^4 \ldots
\end{aligned}
$$

Ferner

Ferner Log. $(1+x)^2 = $ Log. $(1+y) = 2$ Log. $(1+x)$ (§. 109). Wenn man nun statt dieser Logarithmen die obigen unendlichen Reihen setzt, so ist $2Ax + 2Bx^2 + 2Cx^3 + 2Dx^4 + \ldots = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \ldots$ Statt y, y^2, y^3, u. s. w. substituire man in die letzte Reihe die obenstehenden durch x ausgedrückten Werthe von y, so ist

$$\begin{aligned} 2Ax + 2Bx^2 + 2Cx^3 + 2Dx^4 = \\ 2Ax + Ax^2 + 4Bx^3 + Bx^4 \\ 4Bx^2 + 8Cx^3 + 12Cx^4 \\ + 16Dx^4 \end{aligned}$$

Man setze nun die ganze Gleichunng $= 0$, so ist

$$\begin{aligned} 0 = 2Ax + Ax^2 + 4Bx^3 + Bx^4 + \ldots \\ - 2Ax + 4Bx^2 + 8Cx^3 + 12Cx^4 \ldots \\ - 2Bx^2 - 2Cx^3 + 16Dx^4 \ldots \\ - 2Dx^4 \end{aligned}$$

Man bestimme nun auf die bey unendlichen Reihen gewöhnliche Weise die Coefficienten (§. 177. 178.); nämlich

$$\begin{aligned} &2A - 2A = 0; && \text{also } A = A \\ &A + 4B - 2B = 0; && B = -\tfrac{1}{2}A \\ &4B + 8C - 2C = 0; && C = \tfrac{1}{3}A \\ &B + 12C + 16D - 2D = 0; && D = -\tfrac{1}{4}A. \end{aligned}$$

Man substituire diese Werthe in die Hauptreihe, so findet man Log. $(1+x) = Ax - \frac{1}{2}Ax^2 + \frac{1}{3}Ax^3 - \frac{1}{4}Ax^4 + \frac{1}{5}Ax^5 - \frac{1}{6}Ax^6 \ldots$

§. 190.

§. 190.

Man nehme z. B. $x = 1$ an, so ist

$$\text{Log.}\,2 = A - \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{3}A - \tfrac{1}{4}A + \tfrac{1}{5}A - \tfrac{1}{6}A + \ldots$$
$$= A(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6})$$

Man gebrauche nun Decimalbrüche, so ist Log. 2 = A. (1 — 0,500000 + 0,333333 — 0,250000 + 0,200000 — 0,166666 + ...) und wenn man das Positive und Negative sammelt, so ist Log. 2 = + 1,533333 — 0,916666 = 0,616667. Die gefundene Reihe convergirt sehr langsam, und man müßte eine sehr große Menge von Gliedern nehmen, um nicht beträchtlich zu fehlen. Der gefundene Logarithme von 2 = 0,616667 ist daher nur in Zehntheilen genau, und schon in den Hunderttheilen fehlerhaft. Sucht man den Logarithmen einer Zahl, welche grösser als 2 ist, oder wenn $x > 2$ ist, so divergirt die Reihe oder entfernt sich immer weiter von dem wahren Werthe, und ist also völlig unbrauchbar. Z. B. $x = 3$ und Log. $(1 + x)$ = Log. 4 = A. $(1 - \frac{9}{2} + \frac{27}{3} - \frac{81}{4} + \frac{243}{5} - \frac{729}{6} + \ldots)$, welche Reihe ganz offenbar divergirt (§. 175.), woraus folgt, daß die gefundene unendliche Reihe für Log. $(1 + x) = A.\ (x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \ldots)$ sehr langsam convergirt, wenn selbige zur Berechnung von Logarithmen von Zahlen, welche = 2 oder < 2 sind, angewandt wird, aber bey den Logarithmen solcher Zahlen, welche > 2 sind, divergirt.

§. 191.

§. 191.

Man soll die §. 189. gefundene Formel in eine geschwind convergirende Reihe verwandeln und daraus die Logarithmen berechnen.

Es ist bewiesen, daß
$\log.(1+x) = A.(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7 \ldots)$.

Auf eben die Art läßt sich beweisen, daß
$\log.(1-x) = A.(-x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{7}x^7 \ldots)$.

Man subtrahire die untere Reihe von der obern, so ist
$\log.(1+x) - \log.(1-x) = \log.\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ (§. 108.) $= 2A.(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 + \ldots)$. Wir wollen ferner $x = \frac{y}{a}$ annehmen, so ist
$\frac{1+x}{1-x} = \frac{1+\frac{y}{a}}{1-\frac{y}{a}} = \frac{a+y}{a} : \frac{a-y}{a}$ (§. 10.) $= \frac{a+y}{a-y}$ (§. 13.). Hieraus folgt, daß $\log.\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \log.\left(\frac{a+y}{a-y}\right) = 2A.(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \ldots)$.

Man substituire in die unendliche Reihe statt x $\frac{y}{a}$, so ist $\log.\left(\frac{a+y}{a-y}\right) = 2A.\left(\frac{y}{a} + \frac{y^3}{3a^3} + \frac{y^5}{5a^5} + \frac{y^7}{7a^7} + \ldots\right)$.

Man kann diese Formel noch bequemer zur Berechnung der Logarithmen, sowohl für ganze als für gebrochene Zahlen, einrichten. Man denke sich einen Ausdruck $\frac{P}{Q}$, so bedeutet derselbe eine ganze Zahl, wenn P $>$ Q und P durch Q ohne Rest theilbar ist, aber einen eigentlichen Bruch, wenn P $<$ Q ist. Man setze nun $P + Q = a$ und $P - Q = y$, so ist $P = \frac{1}{2}(a + y)$ und $Q = \frac{1}{2}(a - y)$ (§. 25. Trigon.); also $\frac{P}{Q} = \frac{\frac{1}{2}(a+y)}{\frac{1}{2}(a-y)} = \frac{a+y}{a-y}$, woraus dann endlich folgt, daß

$$\text{Log.}\left(\frac{P}{Q}\right) = 2\,A\,.\left(\frac{y}{a} + \frac{y^3}{3\,a^3} + \frac{y^5}{5\,a^5} + \frac{y^7}{7\,a^7} + \ldots\right).$$

Erstes Beyspiel.

Soll man den Logarithmen von 2 berechnen, so kann man $2 = \frac{2}{1} = \frac{P}{Q}$ annehmen; also $P = 2$, $Q = 1$, $P + Q = a = 3$, $P - Q = y = 2 - 1 = 1$; also $\text{Log.}\left(\frac{2}{1}\right) = \text{Log.}\,2 = 2\,A\,.\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \ldots\right) = 2\,A\,.\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{81} + \frac{1}{1215} + \frac{1}{15309} + \ldots\right)$. Verwandelt man diese Brüche in Decimalbrüche (§. 55. Arith.), so ist

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3} &= 0{,}3333333 \\ \tfrac{1}{81} &= 0{,}0123457 \\ \tfrac{1}{1215} &= 0{,}0008230 \\ \tfrac{1}{15309} &= 0{,}0000653 \\ \hline &\ 0{,}3465673 \end{aligned}$$

Also

Also ist Log. 2 = 2 A . 0,3465673 und wenn man die Zahl hinter A mit 2, dem Coefficienten von A, multiplicirt, so ist Log. 2 = A . 0,6931346. Dieser Logarithme ist nur in den vier ersten Decimalen 0,6931 zuverlässig; will man ihn aber bis auf acht Decimalen zuverlässig haben, so muß man acht Glieder der unendlichen Reihe nehmen und die Rechnung so weit fortsetzen; man wird dann Log. 2 = A . 0,69314718 finden.

Zweytes Beyspiel.

Man soll den Logarithmen von $5 = \frac{5}{1} = \frac{P}{Q}$ finden; folglich $P + Q = a = 5 + 1 = 6$ und $P - Q = y = 5 - 1 = 4$; also Log. $5 = 2 A . (\frac{4}{6} + \frac{4^3}{3 . 6^3} + \frac{4^5}{5 . 6^5} + \frac{4^7}{7 . 6^7} + \ldots)$. Man wird also Log. 5 = A . 1,60943791 finden.

Auf diese Art sind folgende Logarithmen berechnet:

Log. 3 = A . 1,0986123	Log. 9 = A . 2,1972246
Log. 4 = A . 1,3862944	Log. 10 = A . 2,3025851
Log. 6 = A . 1,7917595	Log. 11 = A . 2,3978953
Log. 7 = A . 1,9459101	Log. 12 = A . 2,4849066
Log. 8 = A . 2,0794415	Log. 13 = A . 2,5649494

§. 192.

Aus dem Vorhergehenden ist deutlich, daß die Logarithmen im weitläuftigsten Sinne des Worts Producte von Decimalbrüchen in einen noch unbe-

stimmten Coefficienten A sind. Die Berechnung der Decimalbrüche ist im vorigen (§. 191.) erklärt worden. Man kann aber dem Coefficienten A verschiedene Werthe, sowohl in ganzen als gebrochenen Zahlen, geben; z. B. A = 1, A = 2, A = $\frac{3}{7}$ u. s. w. und bey jeder neuen Bestimmung von A entsteht eine neue und besondere Gattung von Logarithmen, welche man ein **Logarithmen-System** nennt. Der Werth, den man dem Coefficienten A beylegt, heißt das **Modell des Logarithmen-Systems**; es sind also unzählige Logarithmen-Systeme möglich, weil man dem Modell oder dem Coefficienten A unzählige Werthe in ganzen und gebrochenen Zahlen geben kann. Das einfachste und natürlichste ist, das Modell A = 1 anzunehmen und dann entstehen die **natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen**, welche daher ein Logarithmen-System ausmachen, dessen Modell = 1 ist. Man kann also die hyperbolischen Logarithmen nach §. 191. berechnen, wenn man bloß das Modell oder den Coefficienten A wegläßt, weil die Einheit weder multiplicirt noch dividirt.

Die **Grundzahl** oder die **Basis** eines Logarithmen-Systems ist die Zahl, deren Logarithme = 1 ist. In der Arithmetik §. 112. Anmerk. 2. habe ich die Schriften angeführt, in welchen man Tafeln der hyperbolischen Logarithmen findet. Will man in algebraischen Formeln die natürlichen oder hyperbolischen Logarith-

rithmen bezeichnen, so schreibt man sie durch Abkürzung: log. nat. oder log. hyperb. Z. B. log. nat. 9 oder log. hyp. 9 = 2,1972246. Um die Grundzahl der hyperbolischen Logarithmen zu finden, muß man folgende allgemeine Sätze auflösen.

§. 193.

Aufgabe. Es ist ein hyperbolischer Logarithme gegeben; man soll die Zahl finden, welche zu diesem Logarithmen gehört.

Es sey der gegebene Logarithme = y und die dazu gehörige gesuchte Zahl = 1 + x, so ist nach §. 191. und 192, wenn A = 1 ist:

$$y = \log.(1 + x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots$$

Man invertire diese Reihe, d. h., suche den Werth von x durch y ausgedrückt (§. 186.). Man nehme also an, daß

$$x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \ldots$$

Hieraus findet man

$$x = \left\{ \begin{array}{r} Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \ldots \\ -\tfrac{1}{2}A^2y^2 - ABy^3 - \tfrac{1}{2}B^2y^4 \;\ldots \\ -ACy^4 \;\ldots \\ +\tfrac{1}{3}A^3y^3 + A^2By^4 \;\ldots \\ -\tfrac{1}{4}A^4y^4 \;\ldots \end{array} \right.$$

Nach den vorhin gegebenen Regeln (§. 178.) findet man, daß A = 1, B = $\tfrac{1}{2}$, C = $\tfrac{1}{6}$, D = $\tfrac{1}{24}$ u. s. w., woraus folgt, daß

$$x = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{2.3} + \frac{y^4}{2.3.4} + \frac{y^5}{2.3.4.5} + \ldots$$

Aber die gesuchte Zahl, welche zum Logarithmen y gehören soll, ist nicht x, sondern x + 1; man muß also auf beyden Seiten 1 addiren, so ist

$$1 + x = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{2.3} + \frac{y^4}{2.3.4} + \frac{y^5}{2.3.4.5} \ldots$$

Will man diese unendliche Reihe dazu anwenden, um die Grundzahl der hyperbolischen Logarithmen zu finden, so muß man die Zahl suchen, deren Logarithme = 1 ist (§. 192.); der gegebene hyperbolische Logarithme oder y ist = 1 und die gesuchte Zahl, welche diesem Logarithmen gehört,

$$1 + x = 1 + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24} + \tfrac{1}{120} + \ldots$$

Bringt man diese Brüche auf Decimalbrüche (§. 55. Arith.) und addirt sie (§. 49. Arith.), so wird man 1 + x oder **die Grundzahl der hyperbolischen Logarithmen = 2,7182818 finden und die hyperbolischen Logarithmen machen dasjenige Logarithmen-System aus, dessen Grundzahl = 2,7182818 und dessen Modell = 1 ist** (§. 192.).

§. 194.

In der Arithmetik ist schon gesagt worden, daß die Grundzahl der briggischen Logarithmen, welche man in den gewöhnlichen Logarithmen-Tafeln findet, = 10 ist (§. 111. Arith.); man bezeichnet sie gleichfalls: Log. brigg. oder Log. tab.; z. B. Log. brigg. oder Log. tab. 120 = 2,0791812.

Auf-

Aufgabe: Man soll das Modell des briggischen Logarithmen-Systems finden.

In jedem Logarithmen-System ist Log. 10 = A. 2,30258509 (§. 191.); aber in dem briggischen System ist Log. 10 = 1 (§. 111. Arith.); also 1 = A. 2,30258509 und also $\frac{1}{2,30258509}$ = A = 0,43429448 oder das Modell der briggischen Logarithmen (§. 192.) ist = $\frac{\text{Log. brigg. } 10}{\text{Log. hyp. } 10}$ = A. Die briggischen Logarithmen machen also dasjenige Logarithmen-System aus, dessen Grundzahl = 10 und dessen Modell = 0,43429448 ist.

Hieraus folgt: 1) daß man die hyperbolischen Logarithmen in die briggischen verwandeln kann, wenn man die hyperbolischen Logarithmen mit 0,43429448 multiplicirt oder Log. hyp. a 0,43429448 = Log. brigg. a. 2) Wenn man die briggischen Logarithmen in die hyperbolischen verwandeln will, so muß man sie mit 2,71828183 multipliciren oder Log. brigg. b. 2,71828183 = Log. hyp. b.

§. 195.

Wenn eine Größe als Wurzel betrachtet in zwey Theile getheilt wird, z. B. a und b, so heißt a + b die binomische Wurzel (§. 7.), woraus man das binomische Quadrat = (a + b). (a + b) = $a^2 + 2ab + b^2$ (§. 8.); den binomischen Kubus = (a^2 + 2ab + b). (a + b) = $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ erhält. Wird

 der

der Kubus wieder mit der Wurzel multiplicirt oder $(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) \cdot (a+b)$, so gibt das die vierte Potenz (§ 54) und auf eben die Art berechnet man die höhern Potenzen der binomischen Wurzel $a+b$, so wie man sie in der folgenden Tafel findet.

Wurzel	$a + b$
2. Potenz.	$a^2 + 2ab + b^2$
3. Potenz	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
4. Potenz	$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
5. Potenz	$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
6. Potenz	$a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$
7. Potenz	$a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$

Betrachtet man diese Tafel etwas genauer, so sieht man, daß die binomischen Potenzen eine gewisse Ordnung und ein beständiges Gesetz beobachten. So ist in der siebenten Potenz in dem ersten Gliede a^7, in dem zweyten a^6, in dem dritten a^5 u. s. w.; ferner in dem zweyten Gliede b, in dem dritten b^2, in dem vierten b^3 u. s. w. Eben so ist auch in den Zahl-Coefficienten 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1, eine in die Augen fallende Ordnung. Unter der **Binomial-Formel** versteht man einen allgemeinen Ausdruck dieser Ordnung und dieses Gesetzes, sowohl für Buchstaben als für Zahlen. **Newton** hat dieselbe zuerst erfunden und nach ihm heißt sie **Newtons Binomial-Formel**. Durch Hülfe dieser Formel kann man jede Größe als Wurzel betrachtet zu einer beliebigen Potenz erheben, und aus einer Größe als Potenz betrachtet jede Wurzel ziehen. Aus der vorhin erklärten Theorie der hyperbolischen Logarithmen läßt sich die Binomial-Formel beweisen.

§. 196.

Aufgabe. **Man soll einen allgemeinen Ausdruck für eine beliebige Potenz von $1 + x$ finden.**

Man bezeichne diese Potenz durch eine unendliche Reihe, so ist $(1 + x)^m = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots$

Man setze ferner $(1+x)^m = 1+y$, so ist
$1+y = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots$

Subtrahirt man nun auf beyden Seiten die Einheit, so erhält man eine Gleichung für y, welche man quadrirt, kubirt u. s. w.

$$\begin{aligned}
y &= Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots \\
y^2 &= \quad A^2x^2 + 2ABx^3 + B^2x^4 + \ldots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad 2ACx^4 + \ldots \\
y^3 &= \qquad\qquad A^3x^3 + 3A^2Bx^4 + \ldots \\
y^3 &= \qquad\qquad\qquad\qquad A^4x^4 + \ldots
\end{aligned}$$

Nun ist angenommen, daß $(1+x)^m = 1+y$ ist, also sind auch ihre hyperbolischen Logarithmen gleich, oder m Log. hyp. $(1+x)$ = Log. hyp. $(1+y)$ (§. 108). Diese hyperbolischen Logarithmen drücke man durch ihre unendlichen Reihen aus (§. 189); also

$$mx - \tfrac{1}{2}mx^2 + \tfrac{1}{3}mx^3 - \tfrac{1}{4}mx^4 + \tfrac{1}{5}mx^5 - \ldots = y - \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{4}y^4 + \tfrac{1}{5}y^5.$$

In die letzte Reihe substituire man die vorhin gefundenen Werthe von y, y^2, y^3, y^4, u. s. w., so findet man

$$\begin{aligned}
mx - \tfrac{1}{2}mx^2 + \tfrac{1}{3}mx^3 - \tfrac{1}{4}mx^4 + \tfrac{1}{5}mx^5 - \ldots &= \\
Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots \\
- \tfrac{1}{2}A^2x^2 - ABx^3 - \tfrac{1}{2}B^2x^4 - \ldots \\
- ACx^4 - \ldots \\
+ \tfrac{1}{3}A^3x^3 + A^2Bx^4 - \ldots \\
- \tfrac{1}{4}A^4x^4 - \ldots
\end{aligned}$$

Wenn

Wenn man nun Alles auf Eine Seite schafft, und dadurch die Gleichung auf o reducirt, so ist

$$\begin{array}{rl} 0 = & Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots \\ & - mx - \tfrac{1}{2}A^2x^2 - ABx^3 - \tfrac{1}{2}B^2x^4 - \ldots \\ & \qquad\qquad - ACx^4 - \ldots \\ & + \tfrac{1}{2}mx^2 + \tfrac{1}{3}A^3x^3 + A^2Bx^4 + \ldots \\ & \qquad - \tfrac{1}{3}mx^3 - \tfrac{1}{4}A^4x^4 - \ldots \\ & \qquad\qquad + \tfrac{1}{4}mx^4 + \ldots \end{array}$$

Nun lassen sich die Coefficienten bestimmen: $A = m$. Ferner $B - \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}m = 0$, also $B = \frac{1}{2}A^2 - \frac{1}{2}m = \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}m = \frac{m.(m-1)}{1.2}$ (§. 8. 10). Ferner $C - AB + \frac{1}{3}A^3 - \frac{1}{3}m = 0$, also $C = AB - \frac{1}{3}A^3 + \frac{1}{3}m$; nun ist aber $A = m$ und $B = \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}m$; also $AB = \frac{1}{2}m^3 - \frac{1}{2}m^2$ und $-\frac{1}{3}A^3 = -\frac{1}{3}m^3$; also $C = \frac{1}{2}m^3 - \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{3}m^3 + \frac{1}{3}m = \frac{3m^3 - 3m^2 - 2m^3 + 2m}{6} = \frac{m^3 - 3m^2 + 2m}{6} = \frac{m(m-1).(m-2)}{1.2.3}$. Ferner $D - \frac{1}{2}B^2 - AC + A^2B - \frac{1}{4}A^4 + \frac{1}{4}m = 0$, woraus man $D = \frac{m(m-1).(m-2).(m-3)}{1.2.3.4}$ finden wird.

Substituirt man nun die Werthe dieser Coefficienten A, B, C, D, u. s. w. in die Reihe $(1+x)^m = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4$ u s. w., so ist

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m.(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3}x^3 + \frac{m.(m-1).(m-2).(m-3)}{1.2.3.4}x^4 + \text{u. s. w.}$$

§. 197.

Wenn man die binomische Wurzel $a+b$ auf die Potenz m erheben will, so ist $(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m.(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2 + \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}b^3 + \frac{m.(m-1).(m-2).(m-3)}{1.2.3.4}a^{m-4}b^4 + \ldots$

Weil $(a+b)^m$ nicht verändert wird, wenn man diese Größe mit a^m multiplicirt und dividirt, so ist $(a+b)^m = \frac{a^m(a+b)^m}{a^m}$; wenn man aber Zähler und Nenner zur Potenz m erhebt, so ist dadurch der Bruch zur Potenz m erhoben; also $(a+b)^m = \frac{a_m(a+b)^m}{a^m} = a^m.\left(1+\frac{b}{a}\right)^m$. Wenn man also in die §. 196. gefundene Formel statt x $\frac{b}{a}$ setzt, so ist $a^m.\left(1+\frac{b}{a}\right)^m = a^m.\left(1+m\frac{b}{a}+\frac{m.(m-1)}{1.2}\frac{b^2}{a^2}+\frac{m(m-1).(m-2)}{1.2.3}\frac{b^3}{a^3}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\frac{b_4}{a^4}+\ldots\right)$. Nun ist aber $\frac{b}{a} = a^{-1}b$, $\frac{b^2}{a^2} = a^{-2}b^2$ u. s. w. (§. 60.), und wenn man diese Ausdrücke noch mit a^m multiplicirt, so ist $a^m.\frac{b}{a} = a^{m-1}b$, $a^m.\frac{b^2}{a^2} = a^{m-2}b^2$ u. s. w. (§. 56.); also ist $(a+b)^m = a^m + m\,a^{m-1}b + \frac{m.(m-1)}{1.2}$

a^{m-2}

$$a^{m-2} b^2 + \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3} a^{m-3} b^3 +$$
$$\frac{m.(m-1.(m-2).(m-3)}{1.2.3.4} a^{m-4} b^4 + \ldots$$

§. 198.

Diese Formel hat **Newton** noch auf einen kürzern Ausdruck auf folgende Weise gebracht. Man nenne $a = P$ und $\frac{b}{a} = Q$, so ist $b = PQ$; $\frac{b^2}{a^2} = Q^2$, $\frac{b^3}{a^3} = Q^3$ u. s. w. Bringt man diese Ausdrücke in die obige Formel, so ist $(P + PQ)^m = P^m + \frac{m}{1} P^m Q + \frac{m.(m-1)}{1.2} P^m Q^2 + \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3} P^m Q^3 + \frac{m.(m-1).(m-2).(m-3)}{1.2.3.4} P^m Q^4 + \ldots$ Man wird finden, daß jedes vorhergehende Glied in dem folgenden enthalten ist; z. B. das erste Glied P^m in dem zweyten $m P^m Q$; das zweyte in dem dritten $\frac{m.(m-1)}{1.2} P^m Q^2$; das dritte in dem vierten $\frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3} P^m Q^3$; das vierte in dem fünften u. s. w. Man nenne das erste Glied $P^m = A$; das zweyte $m P^m Q = B$; das dritte $\frac{m.(m-1)}{1.2} P^m Q^2 = C$; das vierte $= D$; das fünfte $= E$ u. s. w. auf folgende Weise:

$$(P+PQ)^m = \overset{A}{P^m} + \overset{B}{mP^mQ} + \overset{C}{\frac{m.(m-1)}{1.2}P^mQ^2}$$

$$+ \overset{D}{\frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3}P^mQ^3} \ldots$$

Wenn man nun A, B, C, D, u. s. w. in die Gleichung bringt, so findet man folgenden Ausdruck:

$$(P+PQ)^m = P^m + mAQ + \frac{(m-1)}{2}BQ + \frac{(m-2)}{3}$$

$$CQ + \frac{(m-3)}{4}DQ + \frac{(m-4)}{5}EQ + \frac{(m-5)}{6}FQ + \ldots$$

Newtons Binomial-Formel ist von unendlichem Nutzen, und allgemein wahr, m mag positiv oder negativ, ganz oder gebrochen, rational oder irrational seyn. Hier wollen wir gleich ihren Nutzen zur Erhebung von Größen zu höhern Potenzen und zur Ausziehung höherer Wurzeln kennen lernen.

§. 199.

Man verlangt die sechste Potenz von $(a+b)$ oder $(a+b)^6 = (P+PQ)^m$; also $P = a$, $Q = \frac{b}{a}$ (§. 198.) und $m = 6$; man kann also jedes Glied folgender Maaßen berechnen und aufsetzen.

$P^m =$

$$P^m = a^6 = A$$

$$mAQ = 6 . a^6 . \frac{b}{a} = 6a^5 b = B$$

$$\frac{(m-1)}{2} BQ = \frac{6-1}{2} . 6a^5 b . \frac{b}{a} = 15 a^4 b^2 = C$$

$$\frac{(m-2)}{3} CQ = \frac{(6-2)}{3} . 15a^4 b^2 . \frac{b}{a} = 20 a^3 b^3 = D$$

$$\frac{(m-3)}{4} DQ = \frac{(6-3)}{4} . 20a^3 b^3 . \frac{b}{a} = 15 a^2 b^4 = E$$

$$\frac{(m-4)}{5} EQ = \frac{(6-4)}{5} . 15a^2 b^4 . \frac{b}{a} = 6a\ b^5 = F$$

$$\frac{(m-5)}{6} . FQ = \frac{(6-5)}{6} . 6a\ b^5 . \frac{b}{a} = b^6 = G$$

$$\frac{(m-6)}{7} . GQ = \frac{(6-6)}{7} . b^6 . \frac{b}{a} = 0 = H.$$

Hieraus ersieht man, daß die Binomial-Formel $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5 b + 15 a^4 b^2 + 20 a^3 b^3 + 15 a^2 b^4 + 6 a b^5 + b^6$ gibt, welches dem Product, das die einfache Multiplication gibt (§. 195.), vollkommen gleich ist. Ferner ersieht man hieraus, daß, obgleich die Binomial-Formel im allgemeinen Ausdruck eine unendliche Reihe ist, diese doch in bestimmten Fällen in dem Gliede aufhört, welches $= 0$ ist; im vorigen Beyspiel im Gliede H.

Die Binomial-Formel laßt sich auch auf Zahlen anwenden. Man verlangt z. B. die zehnte Potenz von 3. Man theile die Wurzel in zwey Theile, 3

$= 1$

$= 1 + 2$, so ist $(1+2)^{10} = . (P+PQ)^m$; folglich $P = 1$, $Q = \frac{2}{1} = 2$ und $m = 10$; also

$$P^m = 1^{10} = 1 = A$$

$$mAQ = 10 . 1 . 2 = 20 = B$$

$$\frac{(m-1)}{2} BQ = \frac{9}{2} . 20 . 2 = \frac{360}{2} = 180 = C$$

$$\frac{(m-2)}{3} CQ = \frac{8}{3} . 180 . 2 = \frac{2880}{3} = 960 = D$$

$$\frac{(m-3)}{4} DQ = \frac{7}{4} . 960 . 2 = \frac{13340}{4} = 3360 = E$$

$$\frac{(m-4)}{5} EQ = \frac{6}{5} . 3360 . 2 = \frac{40320}{5} = 8064 = F$$

$$\frac{(m-5)}{6} FQ = \frac{5}{6} . 8064 . 2 = \frac{80640}{6} = 13440 = G$$

$$\frac{(m-6)}{7} GQ = \frac{4}{7} . 13440 . 2 = \frac{107520}{7} = 15360 = H$$

$$\frac{(m-7)}{8} HQ = \frac{3}{8} . 15360 . 2 = \frac{92160}{8} = 11520 = I$$

$$\frac{(m-8)}{9} IQ = \frac{2}{9} . 11520 . 2 = \frac{46080}{9} = 5120 = K$$

$$\frac{(m-9)}{10} KQ = \frac{1}{10} . 5120 . 2 = \frac{10240}{10} = 1024 = L$$

$$\frac{(m-10)}{11} LQ = \frac{0}{11} . 1024 . = 0 = M$$

§. 200.

Die Binomial-Formel läßt sich auch auf vieltheilige Größen oder Polynomien, bey welchen die Wurzeln aus mehr als zwey Theilen bestehen, anwenden. Man

Man verlangt z. B. die vierte Wurzel von $a+b+c$ oder $(a+b+c)^4 = (P+PQ)^m$; also $P = a$, $\frac{b+c}{a} = Q$ und $m = 4$; folglich

$$P^m \quad = \quad a^4 \quad = A$$

$$mAQ = 4a^4 . \frac{b+c}{a} \quad = \quad 4a^3 . (b+c) = B$$

$$\frac{(m-1)}{2} BQ = \tfrac{3}{2} . 4a^3 . (b+c) . \left(\frac{b+c}{a}\right) = 6a^2 . (b+c)^2 = C$$

$$\frac{(m-2)}{3} CQ = \tfrac{2}{3} . 6a^2 (b+c)^2 . \left(\frac{b+c}{a}\right) = 4a . (b+c)^3 = D$$

$$\frac{(m-3)}{4} DQ = \tfrac{1}{4} . 4a . (b+c)^3 . \left(\frac{b+c}{a}\right) = (b+c)^4 = E$$

$$\frac{(m-4)}{5} EQ = \tfrac{0}{5} . (b+c)^4 . \left(\frac{b+c}{a}\right) = \quad 0 \quad = F$$

$$(a+b+c)^4 = a^4 + 4a^3 . (b+c) + 6a^2 . (b+c)^2 + 4a . (b+c)^3 + (b+c)^4 .$$

§. 201.

Man kann die Binomial-Formel auch zur Erhebung einer unendlichen Reihe zu einer verlangten Potenz anwenden.

Man soll die unendliche Reihe $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \ldots$ quadriren, so ist $P = a$, $Q = \frac{bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5}{a}$ und $m = 2$;

folglich $a^2 = A$; $mAQ = 2a^2 . \frac{(bx+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5)}{a}$

$$= 2abx + 2acx^2 + 2adx^3 + 2aex^4 + 2afx^5 = B;$$

$= B$; $\frac{(m-1)}{2} BQ = \frac{1}{2}.(2abx + 2acx^2 + 2adx^3 + 2aex^4 + 2afx^5).\frac{(bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \ldots)}{a}$.

Man wird nun finden, daß das Quadrat der unendlichen Reihe besteht aus

$$P^m + mAQ = a^2 + 2abx + 2acx^2 + 2adx^3 + 2aex^4 + \ldots$$

$$+ \frac{(m-1)}{2} BQ = \left\{ \begin{array}{r} b^2x^2 + bcx^3 + bdx^4 + \ldots \\ + bcx^3 + c^2x^4 + \ldots \end{array} \right.$$

Soll eben diese Wurzel $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \ldots$ zur dritten Potenz erhoben werden, so ist $P = a$, $Q = \frac{bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \ldots}{a}$ und $m = 3$. Hieraus wird man finden

$$P^m + mAQ = a^3 + 3a^2bx + 3a^2cx^2 + 3a^2dx^3 + 3a^2ex^4 + \ldots$$

$$\frac{(m-1)}{2} BQ = \left\{ \begin{array}{r} 3ab^2x^2 + 3abcx^3 + 3abdx^4 + \ldots \\ + 3abcx^3 + 3ac^2x^4 + \ldots \\ + 3abdx^4 + \ldots \end{array} \right.$$

$$\frac{(m-2)}{3} CQ = \left\{ \begin{array}{r} b^3x^3 + 2b^2cx^4 + \ldots \\ b^3cx^4 + \ldots \end{array} \right.$$

$$\frac{(m-3)}{4} DQ = 0$$

§. 202.

Die Binomial-Formel läßt sich auch mit Vortheil bey solchen Formeln gebrauchen, bey welchen sie beym ersten Anblick nicht Statt finden zu können scheint.

So

So kann durch Hülfe derselben $\frac{a^2}{a+x}$ in eine unendliche Reihe verwandelt werden; denn $\frac{a^2}{a+x} = a^2 \cdot \frac{1}{a+x}$ (§ 43 Arith.) $= a^2 \cdot (a+x)^{-1}$ (§. 60.). Aber $(a+b)^{-1}$ läßt sich, vermöge der Binomial-Formel, in eine unendliche Reihe verwandeln, wenn man $P = a$, $Q = \frac{x}{a}$ und $m = -1$ setzt.

$$
\begin{array}{llll}
P^m & = a^{-1} & = \frac{1}{a} & = A \\
mAQ & = -1 \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{x}{a} & = -\frac{x}{a^2} & = B \\
\frac{(m-1)}{2} BQ & = \frac{-2}{2} \cdot -\frac{x}{a^2} \cdot \frac{x}{a} & = +\frac{x^2}{a^3} & = C \\
\frac{(m-2)}{3} CQ & = \frac{-3}{3} \cdot +\frac{x^2}{a^3} \cdot \frac{x}{a} & = -\frac{x^3}{a^4} & = D \\
\frac{(m-3)}{4} DQ & = \frac{-4}{4} \cdot -\frac{x^3}{a^4} \cdot \frac{x}{a} & = +\frac{x^4}{a^5} & = E
\end{array}
$$

$$(a+x)^{-1} = \frac{1}{(a+x)} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \frac{x^4}{a^5} - \ldots$$

Diese Reihe multiplicirt man mit a^2, so ist

$$\frac{a^2}{(a+x)} = \frac{a^2}{a} - \frac{a^2 x}{a^2} + \frac{a^2 x^2}{a^3} - \frac{a^2 x^3}{a^4} + \frac{a^2 x^4}{a^5} - \ldots$$

$$= a - x + \frac{x^2}{a} - \frac{x^3}{a^2} + \frac{x^4}{a^3} - \ldots$$

Will man eine unendliche Reihe für den Bruch $\frac{ax}{a^2 - ax + x^2}$ finden, so ist dieser Bruch $= ax \cdot$

$\left(\frac{1}{a^2 - ax + x^2}\right) = ax \,.\, (a^2 - ax + x^2)^{-1}$. Um die Rechnung einfacher und kürzer zu machen, nehme man $(ax - x^2) = y$, so ist $ax \,.\, (a^2 - ax + x^2)^{-1} = ax \,.\, (a^2 - y)^{-1}$. Diesen letzten Theil kann man nach der Binomial-Formel behandeln, so ist $P = a^2$, $Q = \frac{-y}{a^2}$ und $m = -1$; also

$$P^m = (a^2)^{-1} = a^{-2} = \frac{1}{a^2} = A$$

$$mAQ = -1 . + \frac{1}{a^2} . - \frac{y}{a^2} = + \frac{y}{a^4} = B$$

$$\frac{(m-1)}{2} BQ = -\tfrac{2}{2} . + \frac{y}{a^4} . - \frac{y}{a^2} = + \frac{y^2}{a^6} = C$$

$$\frac{(m-2)}{3} CQ = -\tfrac{3}{3} . + \frac{y^2}{a^6} . - \frac{y}{a^2} = + \frac{y^3}{a^8} = D$$

$$\frac{(m-3)}{4} DQ = -\tfrac{4}{4} . + \frac{y^3}{a^8} . - \frac{y}{a^2} = + \frac{y}{a^{10}} = E$$

$$(a^2 - y)^{-1} = \frac{1}{a^2} + \frac{y}{a^4} + \frac{y^2}{a^6} + \frac{y^3}{a^8} + \frac{y^4}{a^{10}} + \ldots$$

Wenn man nun wieder $ax - x^2$ für y substituirt, so ist

$$(a^2 - ax + x^2)^{-1} = \frac{1}{(a^2 - ax + x^2)} = \frac{1}{a^2} + \frac{ax - x^2}{a^4} + \frac{(ax - x^2)^2}{a^6} + \frac{(ax - x^2)^3}{a^8} + \ldots$$

Man erhebe diese Größen zu den bemerkten Potenzen und kürze die Formel so viel als möglich ab, so ist, wenn man nicht weiter als zu x^4 gehen und die übrigen

gen Glieder, welche höhere Potenzen enthalten, übergehen will,

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2}$$

$$\frac{(ax - x^2)}{a^4} = \frac{x}{a^3} - \frac{x^2}{a^4}$$

$$\frac{(ax - x^2)^2}{a^6} = + \frac{x^2}{a^4} - \frac{2x^3}{a^5} + \frac{x^4}{a^6}$$

$$\frac{(ax - x^2)^3}{a^8} = + \frac{x^3}{a^5} - \frac{3x^4}{a^6} \cdots$$

$$\frac{(ax - x^2)^4}{a^{10}} = + \frac{x^4}{a^6} \cdots$$

$$\frac{1}{a^2 - ax + x^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{x}{a^3} - \frac{x^3}{a^5} - \frac{x^4}{a^6} \cdots$$

Multiplicirt man nun auf beyden Seiten mit ax, so ist

$$\frac{ax}{a^2 - ax + x^2} = \frac{ax}{a^2} + \frac{ax^2}{a^3} - \frac{ax^4}{a^5} - \frac{ax^5}{a^6}$$

$$= \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^4}{a^4} - \frac{x^5}{a^5} \cdots$$

§. 203.

Die Binomial-Formel läßt sich ebenfalls zur Ausziehung von Wurzeln gebrauchen, wenn man m für einen Bruch annimmt.

Z. B. $\sqrt{(a^2 - x^2)} = (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ (§. 65.); also $P = a^2$, $Q = -\frac{x^2}{a^2}$ und $m = \frac{1}{2}$; also

$$P^m = (a^2)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{2}} = a = A$$

$$mAQ = \tfrac{1}{2}.a. - \frac{x^2}{a^2} = -\frac{ax^2}{2a^2} = -\frac{x^2}{2a} = B$$

$$\frac{(m-1)}{2}BQ = -\tfrac{1}{4}. - \frac{x^2}{2a}. - \frac{x^2}{a^2} = -\frac{x^4}{2.4.a^3} = C$$

$$\frac{(m-2)}{3}CQ = -\tfrac{3}{6}. - \frac{x^4}{2.4.a^3}. - \frac{x^2}{a^2} = -\frac{3x^6}{2.4.6.a^5} = D$$

$$\frac{(m-3)}{4}DQ = -\tfrac{5}{8}. - \frac{3x^6}{2.4.6.a^5}. - \frac{x^2}{a^2} = -\frac{3.5.x^8}{2.4.6.8.a^7} = E$$

$$\sqrt{(a^2 - x^2)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{2.4.a^3} - \frac{3x^6}{2.4.6.a^5} - \frac{3.5.x^8}{2.4.6.8.a^7}$$

Auf

Auf eben die Art würde man gefunden haben, daß
$$\sqrt{(a^2+x^2)} = a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8.a^3} + \frac{x^6}{16.a^5} - \frac{x^8}{128.a^7} + \ldots$$

Gleichfalls wird man finden, daß $\sqrt[5]{(a^2-x^2)}$
$$= (a^2-x^2)^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{2}{5}} - \frac{a^{\frac{2}{5}}.x^2}{5.a^2} - \frac{2a^{\frac{2}{5}}.x^4}{25.a^4} - \frac{6a^{\frac{2}{5}}.x^6}{125.a^6}$$
$- \ldots$ und weil alle Glieder mit $a^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{a^2}$ multiplicirt sind, so kann man diesen Factor voransetzen und den übrigen Theil der Wurzel damit multipliciren, so ist $\sqrt[5]{(a^2-x^2)} = \sqrt[5]{a^2}.\left(1 - \frac{x^2}{5.a^2} - \frac{2x^4}{25.a^4} - \frac{6x^6}{125.a^6} \ldots\right)$.

§. 204.

Will man $\sqrt[3]{\left(\frac{a^2}{(a^2+x^2)^2}\right)}$ durch eine unendliche Reihe ausdrücken, so ist $\sqrt[3]{\left(\frac{a^2}{(a^2+x^2)^2}\right)}$
$$= \frac{a^{\frac{2}{3}}}{(a^2+x^2)^{\frac{2}{3}}} \text{ (§.65.)} = a^{\frac{2}{3}}.(a^2+x^2)^{-\frac{2}{3}} \text{ (§.60.)}.$$
Den letzten Factor verwandle man durch die Binomial-Formel in eine unendliche Reihe, so ist $P = a^2$; $Q = \frac{x^2}{a^2}$ und $m = -\frac{2}{3}$.

$$P^m = (a^2)^{-\frac{2}{3}} = a^{-\frac{4}{3}} = A$$

$$mAQ = -\frac{2}{3}.a^{-\frac{4}{3}}.\frac{x^2}{a^2} = -\frac{2a^{-\frac{4}{3}}x^2}{3a^2} = B$$

$$\frac{(m-1)}{2} BQ = -\tfrac{5}{6} \cdot -\frac{2a^{-\frac{4}{3}} \cdot x^2}{3a^2} \cdot \frac{x^2}{a^2} = + \frac{2 \cdot 5 \cdot a^{-\frac{4}{3}} \cdot x^4}{3 \cdot 6 \cdot a^4} = C$$

$$\frac{(m-2)}{2} CQ = -\tfrac{8}{9} \cdot + \frac{2 \cdot 5 \cdot a^{-\frac{4}{3}} \cdot x^4}{3 \cdot 6 \cdot a^4} \cdot \frac{x^2}{a^2}$$

$$= -\frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot a^{-\frac{4}{3}} \cdot x^6}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot a^6} = D$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(a^2+x^2)^2}} = a^{-\frac{4}{3}} - \frac{2a^{-\frac{4}{3}} \cdot x^2}{3a^2} + \frac{2 \cdot 5 \cdot a^{-\frac{4}{3}} \cdot x^4}{3 \cdot 6 \cdot a^4} - \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot a^{-\frac{4}{3}} \cdot x^6}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot a^6} + \ldots$$

$$= a^{-\frac{4}{3}} \cdot \left(1 - \frac{2x^2}{3a^2} + \frac{2 \cdot 5 \cdot x^4}{3 \cdot 6 \cdot a^4} - \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot x^6}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot a^6} + \ldots\right).$$

Man multiplicire auf beyden Seiten mit $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$, so ist $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{(a^2+x^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} \cdot \left(1 - \frac{2x^2}{3a^2} + \frac{2 \cdot 5 \cdot x^4}{3 \cdot 6 \cdot a^4} - \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot x^6}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot a^6} - \ldots\right)$.

Auf eben die Art kann man den Werth von $\frac{\sqrt{(a^2+x^2)}}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = (a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ finden.

Will man eine unendliche Reihe für $(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ finden, so ist $P = a^2$, $Q = -\frac{x^2}{a^2}$ und $m = -\frac{1}{2}$; also

$$P^m = (a^2)^{-\frac{1}{2}} = a^{-\frac{2}{2}} = a^{-1} = \frac{1}{a} = A$$

$$mAQ = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} \cdot -\frac{x^2}{a^2} = +\frac{x^2}{2a^3} = B$$

$$\frac{(m-1)}{2} BQ = -\frac{3}{4} \cdot \frac{x^2}{2a^3} \cdot -\frac{x^2}{a^2} = +\frac{3x^4}{2.4.a^5} = C$$

$$\frac{(m-2)}{3} CQ = -\frac{5}{6} \cdot \frac{3x^4}{2.4.a^5} \cdot -\frac{x^2}{a^2} = +\frac{3.5.x^6}{2.4.6.a^7} = D$$

$$\frac{(m-3)}{4} DQ = -\frac{7}{8} \cdot \frac{3.5.x^6}{2.4.6.a^7} \cdot -\frac{x^2}{a^2} = +\frac{3.5.7.x^8}{2.4.6.8.a^9} = E$$

$$\frac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = \frac{1}{a} + \frac{x^2}{2a^3} + \frac{3x^4}{2.4.a^5} + \frac{3.5.x^6}{2.4.6.a^7} + \frac{3.5.7x^8}{2.4.6.8.a^9} + \ldots$$

Oben ist bewiesen, daß $\sqrt{(a^2+x^2)} = a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8 . a^3} + \frac{x^6}{16 . a^5} - \frac{x^8}{128 a^7} + \ldots$ (§. 203.).

Multiplicirt man diese beyden Reihen mit einander, so ist $\frac{\sqrt{(a^2+x^2)}}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = 1 + \frac{2x^2}{2a^2} + \frac{4x^4}{8a^4} + \frac{8x^6}{16a^6} + \ldots$

§. 205.

Aus polynomischen Größen kann man Wurzeln ziehen. Z. B. $\sqrt{(a^2+bx+x^2)} = (a^2+bx+x^2)^{\frac{1}{2}}$; also $P = a^2$, $Q = \frac{bx+x^2}{a^2}$ und $m = \frac{1}{2}$; also

$$P^m = (a^2)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{2}} = a = A$$

$$mAQ = \frac{1}{2} . a . \frac{(bx+x^2)}{a^2} = +\frac{(bx+x^2)}{2a} = B$$

 (m

$$\frac{(m-1)}{2}BQ = -\tfrac{1}{4}.\frac{(bx+x^2)}{2a}.\frac{(bx+x^2)}{a^2} = -\frac{(bx+x^2)^2}{8a^3} = C$$

$$\frac{(m-2)}{3}CQ = -\tfrac{3}{6}.-\frac{(bx+x^2)}{8a^3}{}^2.\frac{(bx+x^2)}{a^2} = +\frac{(bx+x^2)^3}{16a^5} = D$$

$$\frac{(m-3)}{4}DQ = -\tfrac{5}{8}.\frac{(bx+x^2)}{16a^5}{}^3.\frac{(bx+x^2)}{a^2} = -\frac{5.(bx+x^2)^4}{128.a^7} = E$$

Also ist $\sqrt{(a+bx+x^2)} = a + \frac{bx+x^2}{a^2} - \frac{(bx+x^2)^2}{8a^3} + \frac{(bx+x^2)^3}{16a^5} - \frac{5.(bx+x^2)^4}{128.a^7} + \ldots$

§. 206.

In der Arithmetik ist gezeigt worden, wie man aus einer gegebenen Zahl die Quadrat- und Kubicwurzel zieht (§. 65. 67. Arith.). **Es läßt sich ferner fragen, wie man höhere Wurzeln, z. B. die vierte, fünfte, sechste u. s. w. aus einer gegebenen Zahl ziehen könne?** Aus dem Binomiallehrsatz kann man folgende allgemeine Formel zur Ausziehung jeder beliebigen Wurzel durch Approximation oder Näherung herleiten. Es sey die auszuziehende Wurzel die mte. Die Größe, aus der die Wurzel gezogen werden soll, läßt sich so betrachten, als bestehe sie aus einer nächsten vollständigen Potenz und Plus oder

oder Minus einer andern Größe, also $= x^m \pm b$ und die Wurzel, als bestehe sie aus der Wurzel von a^m und noch aus einer andern Größe $= a \pm d$. Nach diesen Bezeichnungen ist also $a \pm d = \sqrt[m]{(a^m \pm b)}$ und wenn man auf beyden Seiten zur Potenz m erhebt, um das Wurzelzeichen fortzuschaffen (§. 54.), so ist

$$(a \pm d)^m = a^m \pm b.$$

Man drücke $(a + d)^m$ nach der Binomial-Formel aus (§. 197.), so ist

$$a^m + m a^{m-1} d + \frac{m.(m-1)}{1.2} a^{m-2} d^2 + \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3} a^{m-3} d^3 = a^m \pm b.$$

Da d als ein sehr kleiner Bruch angesehen wird, so wie bey der Berechnung der Quadrat- und Kubicwurzeln durch Näherung gewiesen ist (§. 65. 67. Arith.), so ist der Kubus, die vierte Potenz u. s. w. von d sehr klein (§. 60. Arith.) und kann ohne merklichen Fehler übergangen werden. Auf beyden Seiten der Gleichung subtrahire man a^m und multiplicire mit 2, so ist

$$2 m a^{m-1} d + m.(m-1) a^{m-2} d^2 = \pm 2 b.$$

Man dividire nun auf beyden Seiten durch $m.(m-1) = m^2 - m$, so erhält man

$$\frac{2 a^{m-1} d}{m-1} + a^{m-2} d^2 = + \frac{2 b}{m^2 - m}.$$

Ferner dividire man durch a^{m-2}, so ist

$$\frac{2 a d}{m-1} + d^2 = \pm \frac{2 b}{(m^2 - m).a^{m-2}}.$$

Dies ist eine unvollständige quadratische Gleichung, welche durch die Addition von $\frac{a^2}{(m-1)^2}$ auf beyden Seiten (§. 93.) ergänzt wird, worauf die Wurzel sich vollständig ausziehen läßt.

$$\frac{a^2}{(m-1)^2} + \frac{2ad}{m-1} + d^2 = \frac{a^2}{(m-1)^2} \pm \frac{2b}{(m^2-m)\,.\,a^{m-2}}$$ und

$$\frac{a}{m-1} + d = \pm\sqrt{\left(\frac{a^2}{(m-1)^2} \pm \frac{2b}{(m^2-m).a^{m-2}}\right)}$$

und

$$d = -\frac{a}{m-1} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{(m-1)^2} \pm \frac{2b}{(m^2-m).a^{m-2}}\right)}$$

Da die durch Näherung gesuchte Wurzel $a + d$ ist, so muß man noch a auf beyden Seiten addiren; aber $a - \frac{a}{m-1} = \frac{am-a-a}{m-1}$ (§. 11.) $= \frac{am-2a}{m-1}$ $= \frac{a.(m-2)}{m-1}$; also $a + d = \frac{a\,.\,(m-2)}{m-1} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{(m-1)^2} \pm \frac{2b}{(m^2-m)\,.\,a^{m-2}}\right)}$, welches also der Werth von $\sqrt[m]{(a^m + b)}$ oder eine allgemeine Formel ist, nach welcher sich jede Wurzel m aus jeder gegebenen Größe $a^m \pm b$ ziehen läßt.

§. 207.

§ 207.

Aus dieser allgemeinen Formel lassen sich nun besondere Formeln zur Ausziehung der vierten, fünften, sechsten u. s. w. Wurzel herleiten, wenn man m bestimmte Werthe in Zahlen gibt.

Es sey m = 3, so ist $\sqrt[3]{(a^3 \pm b)} = \frac{3-2}{3-1} a \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{(3-1)^2} \pm \frac{2b}{(9-3).a}\right)}$ und wenn man m = 4 setzt, so findet man eine Formel zur Ausziehung der vierten Wurzel u. s. w.

$$\sqrt[3]{(a^3 \pm b)} = \tfrac{1}{2} a + \sqrt{\left(\tfrac{1}{4} a^2 \pm \frac{b}{3a}\right)}$$

$$\sqrt[4]{(a^4 \pm b)} = \tfrac{2}{3} a + \sqrt{\left(\tfrac{1}{9} a^2 \pm \frac{b}{6a^2}\right)}$$

$$\sqrt[5]{(a^5 \pm b)} = \tfrac{3}{4} a + \sqrt{\left(\tfrac{1}{16} a^2 \pm \frac{b}{10a^3}\right)}$$

$$\sqrt[6]{(a^6 \pm b)} = \tfrac{4}{5} a + \sqrt{\left(\tfrac{1}{25} a^2 \pm \frac{b}{15a^4}\right)}$$

$$\sqrt[7]{(a^7 \pm b)} = \tfrac{5}{6} a + \sqrt{\left(\tfrac{1}{36} a^2 \pm \frac{b}{21a^5}\right)}$$

§. 208.

Man soll aus einer gegebenen Zahl eine höhere Wurzel ziehen. Die Zahl sey 32768, aus der man die fünfte Wurzel ziehen soll, so suche man den Logarithmen derselben = 4,5154499, und dividire diesen durch 5, so ist der Quotient der Logarithme der

Wurzel

Wurzel, und wenn dazu, wie im gegenwärtigen Fall, genau eine ganze Zahl paßt, wie hier $\frac{4,5154499}{5} =$ 0,9030899 = Log. 8, so ist 8 genau die fünfte Wurzel von 32768. Denn wenn a = 32768 und die Wurzel = b, so ist $\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}} = a$ und $\frac{\text{Log. } a}{m} =$ Log. b (§. 108.).

Wenn aber zum Logarithmen keine ganze Zahl paßt, so muß man diejenige der vorigen Formeln anwenden, die bey der gegebenen Wurzel einer Anwendung fähig ist. Z. B. man verlangt die vierte Wurzel von 375, so ist Log. 375 = 2,5740312 und wenn man durch 4 dividirt, so ist $\frac{2,5740312}{4} = 0,6435078$, wozu 4,4006 gehört, welche Zahl man für die Wurzel = a annehmen kann. Erhebt man aber diese Zahl zur vierten Potenz, so bekommt man

$$\begin{array}{lcr} a^4 & = 4,4006^4 = & 375,01429134 \\ a^4 - b & = & 375,00000000 \\ \hline -b & = & 0,01429134 \end{array}$$

$$\sqrt[4]{(a^4 - b)} = \tfrac{2}{3} a + \sqrt{\left(\tfrac{1}{9} a^2 - \frac{b}{6 a^2}\right)}$$

$$= \tfrac{2}{3} \cdot 4,4006 + \sqrt{\left(\frac{1936538036}{9} - \frac{0,01429134}{116,19228216}\right)}$$

$$= 2,9337332 + \sqrt{(2,15170893 - 0,00012298)}$$

$$= 2,9337332 + \sqrt{(2,15158595)}$$

=

$= 2,9337332 + 1,4668285$

$= 4,4005617.$

Diese Wurzel ist in allen Decimalen zuverläßig, und gibt die vierte Wurzel von 375 in Zehnmillion-Theilen an.

Zwölftes Kapitel.

Höhere Gleichungen.

§. 209.

Höhere Gleichungen heißen diejenigen, in denen die Potenz der unbekannten Größe höher als das Quadrat ist, oder wenn sich in denselben ein Exponent der unbekannten Größe befindet, der größer als 2 ist; z. B. $x^3 = 8$. Der höchste Exponent bestimmt den Grad der Gleichung. Ist dieser $= 3$, so sagt man, die Gleichung sey vom **dritten Grade**, oder es sey eine **kubische Gleichung**. Ist der höchste Exponent $= 4$, so ist die Gleichung vom **vierten Grade**, oder eine **biquadratische Gleichung**; ist derselbe $= 5$, so ist die Gleichung vom **fünften Grade** u. s. w. Eine **reine** oder **einfache höhere Gleichung** ist diejenige, in der nur eine Potenz der unbekannten Größe vorkommt; z. B. $x^5 = a$ und $x = \sqrt[5]{a}$, und die Auflösung solcher

solcher reinen höhern Gleichungen hat keine Schwierigkeit. Eine **zusammengesetzte höhere Gleichung** heißt diejenige, in der man außer der höchsten Potenz der unbekannten Größe noch andere Potungen von x findet; z. B. $x^3 - 6x^2 + 3x = 18$.

§. 210.

Eine höhere Gleichung ordnen heißt die Glieder dergestalt stellen, daß das erste Glied die höchste Potenz enthält, und keinen Coefficienten hat, und darauf die nächste Potenz der unbekannten Größe folgt, und so die übrigen unbekannten Größen nach der Ordnung der Coefficienten, und endlich die bekannten Größen. Die ganze Gleichung wird $= 0$ gesetzt, und wenn eine Potenz in der Ordnung fehlt, so bezeichnet man das fehlende Glied mit einen Sternchen (*). Wenn $4x^4 - 20x^2 + 100x^3 = 500x$ ist, so muß man zuerst mit $4x$ dividiren, so hat man $x^3 - 5x + 25x^2 = 125$ und die geordnete Gleichung ist $x^3 + 25x^2 - 5x - 125 = 0$. Folgende Gleichung vom vierten Grade ist bereits geordnet: $x^4 - 8x^3 + 15x^2 - 24x + 36 = 0$.

§. 211.

Die Wurzel einer geordneten höhern Gleichung ist der Werth, der, für die unbekannte Größe gesetzt, die ganze Gleichung $= 0$ macht, oder der Werth, durch welchen alle Glieder sich wirklich aufheben. So hat

hat die Gleichung $x^3 - 5x^2 - 56x + 60 = 0$ drey Wurzeln, nämlich: $x = 10$, $x = 1$, $x = -6$. Man setze $x = 10$, so ist

$$\begin{aligned} x^3 &= +1000 \\ -5x^2 &= -500 \\ -56x &= -560 \\ +60 &= +60 \end{aligned}$$

$$x^3 - 5x^2 - 56x + 60 = +1060 - 1060 = 0.$$

Noch läßt sich durch die Multiplication beweisen, daß die gegebene Gleichung entsteht, wenn man alle diese auf 0 reducirten Wurzeln mit einander multiplicirt.

Die erste Wurzel $x - 10 = 0$
die zweyte Wurzel $x - 1 = 0$

$$\begin{aligned} &-x + 10 \\ x^2 &- 10x \end{aligned}$$

$$x^2 - 11x + 10 = 0$$

die dritte Wurzel $x + 6 = 0$

$$\begin{aligned} &6x^2 - 66x + 60 \\ x^3 - 11x^2 &+ 10x \end{aligned}$$

die kubische Gleich. $= x^3 - 5x^2 - 56x + 60 = 0.$

Hieraus erhellt deutlich, daß die drey Werthe, welche x haben kann, wenn die ganze Gleichung $= 0$ werden soll, also auch die drey Wurzeln der Gleichung folgende sind: $x = 10$, $x = 1$, $x = -6$. Unter den

Wur-

Wurzeln der Gleichung können einige **positiv**, andere **negativ**; einige **rational**, andere **irrational**; einige **wirkliche** oder **mögliche Größen**, andere **imaginäre** oder **unmögliche Größen** seyn. Einige Verfasser analytischer Werke nennen die positiven Wurzeln **wahre Wurzeln** und die negativen **falsche Wurzeln** (radices verae et falsae). Diese Kunstwörter sind aber doch nicht gut gewählt; denn die negative Wurzel $x = -6$ ist eine eben so wahre und wirkliche Wurzel der obigen kubischen Gleichung, als eine der positiven Wurzeln $x = +10$ und $x = +1$. Ist die Gleichung $x^3 - 8 = 0$ gegeben, so hat sie drey Wurzeln, eine positive $= +2$ und zwey imaginäre Wurzeln, die eine $= -1 + \sqrt{-3}$ und die andere $= -1 - \sqrt{-3}$. Da $x^3 - 8 = 0$, so ist $x^3 = 8$ und $\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{8}$ oder $x = 2$. Die zwey unmöglichen Wurzeln findet man, wenn man $x^3 - 8 = 0$ durch $x - 2 = 0$ dividirt, denn dadurch entsteht die quadratische Gleichung $x^2 + 2x + 4 = 0$ oder $x^2 + 2x = -4$ und wenn man diese unvollständige quadratische Gleichung ergänzt (§. 93.), so ist $x^2 + 2x + 1 = -4 + 1 = +3$ und $x + 1 = \pm\sqrt{-3}$ und $x = -1 \pm \sqrt{-3}$; folglich ist der eine unmögliche Werth von $x = -1 + \sqrt{-3}$ und der andere $= -1 - \sqrt{-3}$.

§. 212.

§. 212.

Aus der §. 212. angeführten kubischen Gleichung $x^3 - 5x^2 - 56x + 60 = (x - 10) . (x - 1) . (x + 6) = 0$ ersieht man, daß **die höhern Gleichungen aus der Multiplication der einfachen Wurzelgleichungen entstehen.** Um allgemeine Regeln über die Natur der Gleichungen zu erhalten, wollen wir die Wurzeln a, b, c, u. s. w. nennen. In Rücksicht der Zeichen sind entweder alle Wurzeln positiv oder alle negativ oder einige positiv und die andern negativ, woraus folgende vier Arten hergeleitet werden, wie die kubische Gleichung entstehen kann; nämlich aus $(x - a) . (x - b) . (x - c)$; zweytens $(x + a) . (x + b) . (x + c)$; drittens $(x - a) . (x - b) . (x + c)$ und viertens $(x - a) . (x + b) . (x + c)$. Durch die wirkliche Multiplication entstehen folgende kubische Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} x - a = 0 \\ x - b = 0 \\ x - c = 0 \end{array}\right\} = x^3 - x^2 . (a + b + c) + x . (ab + ac + bc) - abc = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x + a = 0 \\ x + b = 0 \\ x + c = 0 \end{array}\right\} = x^3 - x^2 . (-a - b - c) + x . (ab + ac + bc) + abc = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x - a = 0 \\ x - b = 0 \\ x + c = 0 \end{array}\right\} = x^3 - x^2 . (a + b - c) + x . (ab - ac - bc) + abc = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x-a=0 \\ x+b=0 \\ x+c=0 \end{array}\right\} = x^3 - x^2.(a-b-c) + x.(-ab - ac + bc) - abc = 0.$$

Auf eben die Art kann man allgemeine Ausdrücke für Gleichungen vom vierten, fünften u. s. w. Grade finden, welche aber hier der Kürze halber übergangen werden.

§. 213.

Wenn man diese allgemeinen Ausdrücke für die höhern Gleichungen etwas genauer betrachtet, so kann man aus ihnen folgende allgemeine Regeln herleiten:

1) **Jede höhere Gleichung hat so viele Wurzeln als Einheiten im Exponenten der höchsten Potenz, oder in derjenigen Zahl sind, welche den Grad der Gleichung angibt.**

Eine quadratische Gleichung hat 2, eine kubische 3 und eine Gleichung vom vierten Grade 4 Wurzeln u. s. w.

2) **Der Coefficient des zweyten Gliedes ist die Summe der Wurzeln; der Coefficient des dritten Gliedes ist die Summe der Producte je zweyer Wurzeln; der Coefficient des vierten Gliedes ist die Summe der Producte je dreyer Wurzeln u. s. w. Das letzte Glied ist endlich das Product aller Wurzeln.**

3)

3) Sind alle Wurzeln der Gleichung positiv, so haben die Glieder abwechselnd + und —; sind alle Wurzeln negativ, so sind alle Glieder positiv; wenn aber einige Wurzeln positiv, andere negativ sind, so ist keine bestimmte Ordnung in den Zeichen.

4) Wenn die Summe der positiven Wurzeln der Summe der negativen Wurzeln gleich ist, oder wenn die Summe aller Wurzeln = 0 ist, so verschwindet das zweyte Glied; denn der Coefficient des zweyten Gliedes ist die Summe aller Wurzeln (§. 213. Num. 2.), ist also der eine Factor = 0, so ist auch das Product = 0 und also muß das zweyte Glied wegfallen. In jeder Gleichung, in der ein Glied fehlt, können die Wurzeln nicht einerley Zeichen haben; denn alle Coefficienten sind Summen der Producte aus den Wurzeln (Num. 2.); heben sich nun diese Producte oder ist ihre Summe = 0, so müssen einige Producte positiv, andere negativ seyn, welches nur dadurch möglich seyn kann, daß einige Wurzeln positiv, andere negativ sind (§. 8.).

5) Ist die Anzahl der positiven Wurzeln gerade oder ungerade, so ist das letzte Glied positiv; ist die Anzahl der negativen aber ungerade, so ist das letzte Glied negativ, sonst positiv.

6) In einer Gleichung, in der das zweyte Glied positiv ist, ist die Summe der positiven Wurzeln größer als die Summe der negativen (Num. 2.); ist aber das zweyte Glied negativ, so ist die Summe der negativen Wurzeln größer als die Summe der positiven.

7) Eine Gleichung, in der das letzte Glied, welches ein Product aller Wurzeln ist, fehlt, läßt sich in eine Gleichung verwandeln, welche Einen Grad niedriger ist, wenn man allenthalben durch die unbekannte Größe dividirt. Z. B. $x^3 - ax^2 + bx = 0$ läßt sich durch x dividiren, wodurch die quadratische Gleichung $x^2 - ax + b = 0$ entsteht.

§. 214.

Es ist oben bewiesen worden, daß zwey unmögliche Größen ein mögliches Product geben können (§. 81.). Z. B. $(+\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-a}) = -1 \cdot -a = +a$, eben so $(-\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-a}) = +1 \cdot -a = -a$ (§. 83.), woraus folgt, daß, wenn das Product a positiv ist, die unmöglichen Factoren entgegengesetzte Zeichen haben und $= (+\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-a})$ seyn müssen; daß hingegen, wenn das Product negativ ist, sie einerley Zeichen haben und entweder $(+\sqrt{-a}) \cdot (+\sqrt{-a})$ oder $(-\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-a})$ seyn müssen (§. 83.). Gleichfalls kann folgende quadrati-

sche

sche Gleichung $x^2 - 2ax + a^2 + b$ nicht entstehen, wenn man nicht $x - a - \sqrt{-b}$ mit $x - a + \sqrt{-b}$ multiplicirt, woraus folgt,

1) daß, wenn in einer zusammengesetzten höhern Gleichung imaginäre Wurzeln sind, so sind sie in gerader Anzahl vorhanden, weil eine ungerade Anzahl unmöglicher Größen kein mögliches Product geben kann (§. 81. 82.);

2) daß, wenn das letzte Glied der Gleichung positiv ist, so ist einer der unmöglichen Wurzeln positiv, der andere negativ.

3) Jede Gleichung von einem ungeraden Grade, z. B. von 3, 5, 7, u. s. w. ten Grade, hat wenigstens eine unmögliche Wurzel.

4) Jede Gleichung von einem geraden Grade, deren letztes Glied negativ ist, hat wenigstens eine mögliche und wirkliche Wurzel.

§. 215.

Vorhin ist bewiesen, daß wenn die Wurzeln $x = a$, $x = b$ und $x = c$ sind, oder $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x - c = 0$, die Gleichung $x^3 - x^2 . (a + b + c) + x . (ab + ac + bc) - abc = 0$ ist. Nennt man nun die Summe aller Wurzeln $a + b + c = p$; die Summe der Producte je zweyer Wurzeln oder $ab + ac + bc = q$ und das Product aller Wurzeln $= r$, so läßt sich diese Gleichung auf eine allgemeinere Art

so ausdrücken: $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ und wenn man den höchsten Exponenten $= m$ nennen will, so entsteht folgender allgemeiner Ausdruck für jede höhere Gleichung:

$$x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + sx^{m-3} + \dots + r = 0.$$

Jede Gleichung läßt sich in eine andere verwandeln, in der die unbekannte Größe der ersten Gleichung um eine gegebene Größe vermehrt oder vermindert und mit einer gegebenen Größe multiplicirt oder dividirt ist. Die Größe sey $= f$. Man nehme also bey der Vermehrung $y = x + f$ an und $y - f = x$; bey der Verminderung $y + f = x$; bey der Multiplication $y = fx$ und $x = \frac{y}{f}$ und bey der Division $fy = x$ und diese Werthe setze man in die erste Gleichung. Wenn z. B. $y + f = x$, so setzt man statt x^3 den Kubus von $y + f$; statt x^2 das Quadrat von $y + f$ und statt x die Größe $y + f$. Wenn nun diese neue Gleichung geordnet ist (§. 210.), so wird man $y^3 + y^2 . (3f - p) + y . (3f^2 - 2pf + q) + f^3 - pf^2 + qf - r = 0$.

§. 216.

Will man die Gleichung $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$ in eine andere verwandeln, deren Wurzeln um 3 größer sind, so hat man $x + 3 = y$ und $x = y - 3$. Also:

$$x^3 = y^3 - 9y^2 + 27y - 27$$
$$-6x^2 = -6y^2 + 36y - 54$$
$$+13x = +13y - 39$$
$$-10 = -10$$

$$y^3 - 15y^2 + 76y - 130 = 0.$$

Ist die Gleichung $y^3 - 10y^2 + 23y - 14 = 0$ gegeben, deren Wurzeln 7, 2, 1 man um 10 vermindern will, so ist $y - 10 = z$ und $y = z + 10$; also

$$y^3 = z^3 + 30z^2 + 300z + 1000$$
$$-10y^2 = -10z^2 - 200z - 1000$$
$$+23y = +23z + 230$$
$$-14 = -14$$

$$z^3 + 20z^2 + 123z + 216 = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind -3, -8 und -9, welche alle um 10 kleiner sind, als die Wurzeln der ersten Gleichung.

§. 217.

Wenn man eine gegebene Gleichung in eine andere verwandeln will, deren Wurzeln Producte aus den Wurzeln der ersten Gleichung in eine gegebene Größe p sind, so daß $ax = y$ und $x = \frac{y}{a}$ ist, so multiplicirt man jedes Glied der gegebenen Gleichung mit einer geometrischen Progression, deren erstes Glied $= 1$ und der

Name des Verhältnisses = a ist, oder mit der Progression $1 . a . a^2 . a^3$ u. s. w.

Der allgemeinste Ausdruck für jede höhere Gleichung ist

$$x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + sx^{m-3} + \ldots + r = 0 \text{ (§. 215.)}.$$

Weil nun $x = \frac{y}{a}$, so ist

$$x^m = \frac{y^m}{a^m} \text{ (§. 63.)}.$$

$$px^{m-1} = \frac{py^{m-1}}{a^{m-1}}$$

$$qx^{m-2} = \frac{qy^{m-2}}{a^{m-2}}$$

$$sx^{m-3} = \frac{sx^{m-3}}{a^{m-3}}$$

$$r = r$$

$$\frac{y^m}{a^m} + \frac{py^{m-1}}{a^{m-1}} + \frac{qy^{m-2}}{a^{m-2}} + \frac{sy^{m-3}}{a^{m-3}} \ldots + r = 0.$$

Multiplicirt man nun die ganze Gleichung mit a^m, so ist (§. 56. 57.)

$$y^m + apy^{m-1} + a^2qy^{m-2} + a^3sy^{m-3} \ldots + \overset{m}{a}r = 0.$$

Hieraus ersieht man, daß das erste Glied mit 1, das zweyte mit a, das dritte mit a^2, das vierte mit a^3 u. s. w. multiplicirt ist.

Z. B. Man will die Gleichung $x^4 * - 5x^2 * + 4 = 0$ in eine andere Gleichung verwandeln, deren Wurzeln Producte aus den Wurzeln der

ersten

ersten Gleichung in die Zahl 2 sind, so setze man folgende Rechnung auf:

$$x^4 * - 5x^2 * + 4 = 0$$

$$\begin{array}{ccccc} 1. & 2. & 4. & 8. & 16 \end{array}$$

$$x^4 * - 20x^2 * + 64 = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind $+2$, $+4$, -2, -4, und zweymal so groß als die Wurzeln der ersten Gleichung $+1$, $+2$, -1, -2.

Wenn man die Wurzel einer Gleichung x durch eine gegebene Größe a dividiren will, nämlich $\frac{x}{a} = y$ und $x = ay$, so hat man nur nöthig, die Glieder der Gleichung durch die Glieder einer geometrischen Progression, deren erstes Glied $= 1$ und der Name des Verhältnisses $= a$ ist, zu dividiren.

Ich will dies durch eine kubische Gleichung erläutern: $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, so ist

$$\begin{aligned} x^3 &= a^3y^3 \\ -px^2 &= -a^2py^2 \\ +qx &= aqy \\ -r &= -r \end{aligned}$$

$$a^3y^3 - a^2py^2 + aqy - r = 0.$$

Man dividire durch a^3, so ist

$$y^3 - \frac{py^2}{a} + \frac{qy}{a^2} - \frac{r}{a^3} = 0.$$

Das erste Glied ist also mit 1, das zweyte mit $\frac{1}{a}$, das dritte $= \frac{1}{a^2}$, das vierte mit $\frac{1}{a^3}$ multiplicirt; aber mit 1, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$ u. s. w. multipliciren ist eben so viel, als durch die geometrische Progression 1, a, a^2, a^3 u. s. w. dividiren.

Z. B. Man will die Wurzel der Gleichung $x^4 + 8x^3 - 76x^2 - 848x - 1920 = 0$ durch 2 dividiren, so ist

$$\begin{array}{cccccc} x^4 + & 8x^3 - & 76x^2 - & 848x - & 1920 & = 0 \\ 1. & 2. & 4. & 8. & 16 & \\ \hline y^4 + & 4y^3 - & 19y^2 - & 106y - & 120 & = 0 \end{array}$$

in welcher neuen Gleichung $y = \frac{1}{2}x$ ist.

§. 218.

Wenn man das zweyte Glied einer höhern Gleichung wegschaffen, oder dasselbe verschwinden lassen will, so setze man die unbekannte Größe der Gleichung x einer andern unbekannten Größe y gleich, welche um den Coefficienten des zweyten Gliedes p, dividirt durch diejenige Zahl, die den Grad der Gleichung anzeigt, vermehrt oder vermindert ist; d. h. $x = y \pm \frac{p}{m}$. Man gebraucht —, wenn das zweyte Glied positiv und +, wenn dasselbe negativ ist.

In

In dem allgemeinen Ausdruck für die höhern Gleichungen (§. 215.)

$$x^m \pm px^{m-1} \pm qx^{m-2} \pm sx^{m-3} \pm \ldots \pm r = 0$$

nehme man $x = y \pm f$ an, und bringe diesen Werth in die Gleichung. Nach der Binomial-Formel erhebe man $y + f$ zur Potenz m (§. 197.), darauf zur Potenz $m - 1$, und multiplicire jedes Glied mit p; eben so erhebe man $y + f$ zur Potenz $m - 2$, und multiplicire jedes Glied mit q u. s. w. Also

$$\left.\begin{array}{l} x^m = (y + f)^m = y^m + my^{m-1}f + \\ \qquad\qquad \frac{m.(m-1)}{1.2} y^{m-2} f^2 + \\ px^{m-1} = p(y+f)^{m-1} = \pm py^{m-1} \pm \\ \qquad\qquad (m-1)py^{m-2}f \pm \ldots \\ qx^{m-2} = q(y+f)^{m-2} = \pm qy^{m-2} \pm \ldots \end{array}\right\} = 0.$$

Soll nun das zweyte Glied dieser Gleichung verschwinden, so muß $my^{m-1}f \pm py^{m-1} = 0$ seyn; man dividire durch my^{m-1}, so ist $f \pm \frac{p}{m} = 0$ und $f = \mp \frac{p}{m}$; also $x = y \pm f = y \mp \frac{p}{m}$.

Z. B. Aus folgender Gleichung soll man das zweyte Glied wegschaffen: $x^3 - 12x^2 + 41x - 42 = 0$; man setze also $x = y + \frac{12}{3} = y + 4$, so ist

$$x^3 = y^3 + 12y^2 + 48y + 64$$
$$-12x^2 = \quad -12y^2 - 96y - 192$$

+

$$+41x = +41y + 164$$
$$-42 = -42$$

$$y^3 \;*\; -7y - 6 = 0$$

Weil in dieser Gleichung, in der das zweyte Glied verschwunden ist, die Wurzeln $y = -2$, $y = -1$ und $y = +3$ sind, so müssen die Wurzeln der ersten Gleichung, aus der letztere entstanden ist, $x = 2$, $x = 3$, $x = 7$ seyn, weil $x = y + 4$.

§. 219.

Man soll alle Divisoren einer gegebenen Zahl finden.

1) Ist die Zahl eine gerade oder durch 2 theilbare Zahl, so dividire man sie durch 2, und setze den Quotienten unten hin; ist sie aber eine ungerade und nicht durch 2 theilbare Zahl, so dividire man durch 3, 5, 7 oder eine andere Primzahl, und setze den Divisor seitwärts rechter Hand.

2) Ist dieser Quotient nun gerade, so dividire man aufs neue durch 2, und ist derselbe ungerade, durch 3, 5, 7, u. s. w. Den Quotienten setzt man unter den vorigen, und den Divisor seitwärts rechter Hand unter den vorigen.

3) Den neuen Quotienten dividire man abermals durch die kleinste gerade oder ungerade Zahl, so daß die Division aufgeht, setze den neuen Quotienten unter die vorigen, und den neuen Divisor unter

unter die vorigen rechter Hand. So fahre man fort, bis man auf einen Quotienten kommt, der selbst eine Primzahl ist, und sich nicht durch eine andere Zahl ausser 1 dividiren läßt.

4) Darauf multiplicire man den ersten Divisor mit dem zweyten, und setze das Product zur Seite des zweyten Divisors; ferner multiplicire man den dritten Divisor mit dem ersten und zweyten, und mit gedachtem Product, und setze diese Producte zur Seite des dritten Divisors; man multiplicire den vierten Divisor mit allen obenstehenden Divisoren und Producten, und setze die neuen Producte zur Seite des vierten Divisors u. s. w.

5) Wenn man auf die Art fortfährt, so erhält man alle Divisoren der gegebenen Zahl, oder, wie man sich ausdrückt, alle Factoren, aus welchen die gegebene Zahl entstehen kann.

Erstes Beyspiel.

Man verlangt alle Divisoren von 210.

Dividendi und Quotienten.	Divisoren.
210	1.
105	2.
35	3. 6.
7	5. 10. 15. 30.
1	7. 14. 21. 35. 42. 70. 105. 210.

In

In der dritten Reihe ist 3 der Divisor und 6 = 3 . 2; in der vierten Reihe ist 5 der Divisor und 10 = 5 . 2, 15 = 5 . 3, 30 = 5 . 6; in der fünften Reihe ist 7 der Divisor und 14 = 7 . 2, 21 = 7 . 3, 35 = 7 . 5, 42 = 7 . 6, 70 = 7 . 10, 105 = 7 . 15 und 210 = 7 . 30.

Weil die gegebene Zahl das Product aller ersten Divisoren ist, oder 210 = 2 . 3 . 5 . 7, so müssen auch alle andere Zahlen, welche Producte derselben sind, die gegebene Zahl 210 ohne Rest dividiren.

Zweytes Beyspiel.

Man soll alle Divisoren von 900 finden.

Dividendi und Quotienten.	Divisoren.
900	1.
450	2.
225	2.4.
75	3.6.12.
25	3.9.12.18.36.
5	5.10.15.20.30.45.60.90.180.
1	5.25.50.75.100.150.225.300.450.900.

Alle mögliche Divisoren von 900 sind also:

1	15	75
2	18	90
3	20	100
4	25	150
5	30	180

6	36	225
9	45	300
10	50	450
12	60	900

§. 220.

Man soll, wenn es angeht, die Kubicwurzel aus einer Größe ziehen, welche aus einem rationalen und irrationalen Theil besteht; z. B. aus $10 + \sqrt{108}$.

Solche Größen lassen sich im Allgemeinen unter der Form $a + \sqrt{b}$ vorstellen, wo a rational und b irrational ist. Hier sind zwey Fälle möglich:

1) Wenn $a^2 - b$ ein vollständiger Kubus ist.

Man nehme an, der rationale Theil der gesuchten Kubicwurzel sey $= x$ und der irrationale Theil $= \sqrt{y}$; also

$$1 \ldots\ldots \sqrt[3]{(a + \sqrt{b})} = x + \sqrt{y}.$$

Diese Gleichung kubire man (§. 73. 195.)

$$2 \ldots a + \sqrt{b} = x^3 + 3xy + 3x^2 \sqrt{y} + y\sqrt{y}.$$

Man setze nun den rationalen Theil $a = x^3 + 3xy$ und den irrationalen Theil $\sqrt{b} = 3x^2 \sqrt{y} + y \sqrt{y}$ oder

$$3 \ldots\ldots\ldots a = x^3 + 3xy$$

$$4 \ldots\ldots\ldots \sqrt{b} = 3x^2 \sqrt{y} + y\sqrt{y}.$$

Man quadrire die dritte und vierte Gleichung, so ist

$5 = (3)^2 = a^2 = x^6 + 6x^4y + 9x^2y^2$

$6 = (4)^2 = b = \quad 9x^4y + 6x^2y^2 + y^3$

$5 - 6 = 7 = a^2 - b = x^6 - 3x^4y + 3x^2y^2 - y^3 = (x^2 - y)^3$

$\sqrt[3]{7} = 8 = \sqrt[3]{(a^2 - b)} = x^2 - y.$

Um den Ausdruck abzukürzen, kann man $\sqrt[3]{(a^2 - b)}$ $= n$ nennen; also

$9 \ldots \sqrt{(a^2 - b)} = n$

$10 \ldots n = x^2 - y$

$11 \ldots y = x^2 - n.$

Setzt man nun diesen Werth von y in die dritte Gleichung $a = x^3 + 3xy$, so ist

$12 \ldots a = x^3 + 3x^3 - 3nx = 4x^3 - 3nx$

$13 \ldots 4x^3 - 3nx - a = 0.$

Also ist man nun auf eine kubische Gleichung gekommen, welche man auflösen kann, wenn man alle Factoren von a sucht (§. 219.) und sie in die Gleichung bringt, wo dann diejenige derselben, welche den Werth der Gleichung in Zahlen $= 0$ gibt, die kubische Wurzel $= x$ ist (§. 211.), und weiß man x, so kann man leicht y finden.

Beyspiel. Man verlangt die Kubicwurzel von $10 + \sqrt{108} = a + \sqrt{b}$, also $a = 10$, $b = 108$; folglich $a^2 - b = n^3 = 100 - 108 = -8$, welches eine vollständige Kubiczahl und $\sqrt[3]{(a^2 - b)} = n$

=

$= -2$ ist (§. 79.); also vermöge der letzten oder dreyzehnten Gleichung $4x^3 - 3nx - a = 0$ ist $4x^3 + 6x - 10 = 0$. Um die Wurzel dieser kubischen Gleichung zu finden, löse man die Zahl 10 in ihre Factoren auf, welche 1. 2. 5. 10. sind. Setzt man nun $1 = x$, so ist $4 + 6 - 10 = 0$; also ist 1 eine der Wurzeln und $x = 1$; nun ist vermöge der eilften Gleichung $y = x^2 - n$, also $y = 1 + 2 = 3$, folglich $10 + \sqrt{108} = x + \sqrt{y} = 1 + \sqrt{3}$.

2) Wenn $a^2 - b$ ein unvollständiger Kubus ist.

Wenn $a^2 - b$ kein vollständiger Kubus ist, so kann man sich denselben mit einem solchen Coefficienten z multiplicirt denken, daß $z^2 a^2 - z^2 b$ ein vollständiger Kubus wird, welches nicht schwer zu finden ist, und allezeit geschehen muß, wenigstens wenn $a^2 - b = z$. In diesem Fall ist $za + z\sqrt{b} = (x + \sqrt{y})^3$ und $\sqrt[3]{((a+\sqrt{b})z)} = \sqrt[3]{(a+\sqrt{b})} \cdot \sqrt[3]{z} = x + \sqrt{y}$; also $\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})} = \frac{(x+\sqrt{y})}{\sqrt[3]{z}}$.

Beyspiel. Man verlangt die Kubicwurzel von $68 + 9\sqrt{54} = 68 + \sqrt{4374}$; also $a = 68$ und $b = 4374$ und $a^2 - b = 4624 - 4374 = 250$. Dies ist ein unvollständiger Kubus. Man löse nun die Zahl 250 in ihre Factoren auf: 2 . 5 . 10 . 25 . 25 . 50 . 125. Nimmt man nun $2 = z$, so erhält man gleich $a^2 z^2 - z^2 b = 250 . 4 = 1000$ einen

vollständigen Kubus, dessen Wurzel 10 = n ist. Man bringe nun in die Gleichung 13, nämlich $4x^3 - 3nx - a = 0$, welche als mit 2 = z multiplicirt angesehen wird, n = 10 und a = 68 z = 136, so ist $4x^3 - 30x - 136 = 0$.

Man löse die Zahl 136 in ihre Factoren auf: 1. 2. 4. 8. 17. 34. Da nun x = 1 und a = 2 den Werth der Gleichung nicht auf Null bringt, aber, wenn x = 4, 256 — 120 — 136 = 0 ist, so ist 4 eine der Wurzeln (§. 211.) und x = 4; folglich $y = x^2 - n$ (nach Num. 11.) = 16 — 10 = 6; also

$$\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})} = \frac{x+\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}} = \frac{4+\sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}}.$$

Anmerk. Dieser Aufgabe kann man eine so weitläufige Ausdehnung geben, daß man jede Wurzel = m einer binomischen Größe, die aus einem rationalen und irrationalen Theil oder aus a und $-\sqrt[n]{b}$ besteht, verlangt, oder daß man $\sqrt[m]{(a \pm \sqrt[n]{b})}$ sucht. Die Auflösung dieser Aufgabe findet man in Maclaurin Treatise of Algebra, London 1748. p. 109 — 130, und in Scherffer institut. analyt. Pars I. Viennæ 1770. p. 228 — 236.

§. 221.

§. 221.

Man soll eine kubische Gleichung auflösen, oder deren Wurzeln finden.

Befindet sich in der gegebenen Gleichung das zweyte Glied nach, so kann man dasselbe wegschaffen (§. 218.) und die allgemeine Form der kubischen Gleichung, in der das zweyte Glied fehlt, ist $x^3 + 9x + r = 0$ (§. 215.).

Wir wollen annehmen, daß $x = y + z$ ist, und in obige Gleichung statt x^3 $(y + z)^3$ substituiren (§. 195.); also

$$1 \ldots y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 + qx + r = 0;$$

aber $3y^2z + 3yz^2 = 3yz \cdot (y + z)$; folglich

$$2 \ldots y^3 + 3yz \cdot (y + z) + z^3 + qx + r = 0;$$

ferner weil $y + z = x$, so ist

$$3 \ldots y^3 + 3yz \cdot x + z^3 + qx + r = 0.$$

Man setze ferner $3yz = -q$, so ist

$$4 \ldots y^3 - qx + z^3 + qx + r = 0$$

$$5 \ldots y^3 + z^3 + r = 0.$$

Aber weil $3yz = -q$, so ist $z = \frac{-q}{3y}$ und $z^3 = -\frac{q^3}{27y^3}$; setzt man diesen Werth in die Gleichung, so ist

$$6 \ldots y^3 - \frac{q^3}{27y^3} + r = 0$$

$$7 \ldots y^3 + r = \frac{q^3}{27y^3}.$$

Man multiplicire mit y^3

$$8 \ldots y^6 + ry^3 = \frac{q^3}{27}.$$

Dies ist eine vollständige quadratische Gleichung, welche sich nach (§. 93.) auflösen läßt; also

$$9 \ldots y^6 + ry^3 + \tfrac{1}{4}r^2 = \tfrac{1}{4}r^2 + \frac{q^3}{27}$$

$$10 \ldots y^3 + \tfrac{1}{2}r = \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}r^2 + \frac{q^3}{27}\right)}$$

$$11 \ldots y^3 = -\tfrac{1}{2}r \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}r^2 + \frac{q^3}{27}\right)}$$

$$12 \ldots y = \sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}r \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}r^2 + \frac{q^3}{27}\right)}\right)}.$$

Nun ist $x = y + z$, aber $z = -\frac{q}{3y}$, also $x = y - \frac{q}{3y}$; hieraus folgt, daß

$$13 \ldots x = \sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}r \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}r^2 + \frac{q^3}{27}\right)}\right)} - \frac{q}{3\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}r \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}r^2 + \frac{q^3}{27}\right)}\right)}}.$$

Man hat also nun den Werth der einen Wurzel der gegebenen kubischen Gleichung $x^3 + qx + r = 0$ gefunden. Diese Formel läßt sich noch auf eine bequemere Weise ausdrücken. Vorhin ist bewiesen, daß

$$14 \ldots y^3 = -\tfrac{1}{2}r \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}r^2 + \frac{q^3}{27}\right)} \text{ (nach Gl. 11.)}$$

Man

Man addire auf beyden Seiten r, so ist

$$15 \ldots y^3 + r = + \tfrac{1}{2} r \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4} r^2 + \tfrac{q^3}{27}\right)}.$$

Vorhin ist bewiesen, daß $y^3 + z^3 + r = 0$ (nach der Gleichung 5.); also

$$16 \ldots z^3 = - y^3 - r, \text{ folglich}$$

$$17 \ldots z^3 = - \tfrac{1}{2} r \mp \sqrt{\left(\tfrac{1}{4} r^2 + \tfrac{q^3}{27}\right)}$$

$$18 \ldots z = \sqrt[3]{\left(- \tfrac{1}{2} r \mp \sqrt{\left(\tfrac{1}{4} r^2 + \tfrac{q^3}{27}\right)}\right)}.$$

Endlich erhält man $x = y + z = \sqrt[3]{\left(- \tfrac{1}{2} r \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4} r^2 + \tfrac{q^3}{27}\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(- \tfrac{1}{2} r \mp \sqrt{\left(\tfrac{1}{4} r^2 + \tfrac{q^3}{27}\right)}\right)}$.

Beyspiel. Es sey $x^3 - 6x - 40 = 0$, so ist $r = - 40$, $- \tfrac{1}{2} r = + 20$, $\tfrac{1}{4} r^2 = 400$; ferner $q = - 6$, $\tfrac{1}{3} q = - 2$ und $\tfrac{1}{27} q^3 = - 8$; also

$$x = \sqrt[3]{(20 + \sqrt{(400 - 8)})} + \sqrt[3]{(20 - \sqrt{(400 - 8)})}$$

$$x = \sqrt[3]{(20 + \sqrt{392})} + \sqrt[3]{(20 - \sqrt{392})}$$

$x = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2}$ (§. 220) $= 4$.

Die eine Wurzel ist also $= 4$; dividirt man nun die kubische Gleichung $x^3 - 6x - 40 = 0$ durch $x - 4 = 0$, so entsteht die quadratische Gleichung $x^2 + 4x + 10 = 0$ (§. 211. 212.); also $x^2 + 4x = - 10$. Diese unvollständige quadratische Gleichung löse man nach §. 93. auf; nämlich $x^2 + 4x + 4 =$

 — 10

$-10+4=-6$; also $x+2=+\sqrt{-6}$; die zweyte Wurzel ist also $x=-2+\sqrt{-6}$ und die dritte $x=-2-\sqrt{-6}$. Von der Richtigkeit der Auflösung kann man sich durch die wirkliche Multiplication überzeugen; denn $(x-4).(x+2-\sqrt{-6}).(x+2+\sqrt{-6})=x^3-6x-40=0$ (§. 212.).

Anmerk. Diese Methode zur Auflösung kubischer Gleichungen heißt die **Regel des Cardans**, obgleich **Scipio Ferreus** oder, zufolge der Meinung anderer, der Italiäner **Tartaglia** sie erfunden hat. Man hat noch verschiedene andere Methoden zur Auflösung kubischer und biquadratischer Gleichungen, z. B. von **Colson** (Philosophical Transactions, Vol. 25. Num. 309. p. 2353. und von de Moivre Num. 309. p. 2368. In B. Martin System of mathematical institutions, London 1759. p. 275-277. findet man noch eine andere von S. Cole erdachte Methode.

§. 222.

Man soll die Wurzeln einer gegebenen höhern Gleichung finden, wenn selbige ganze und rationale Zahlen sind.

1) Man suche alle Divisoren des letzten Gliedes der gegebenen Gleichung (§. 219.). Da die Wurzeln, zufolge der Voraussetzung, ganze Zahlen sind

und

und das letzte Glied ein Product aller Wurzeln ist (§. 213. Num. 2.), so müssen sich die Wurzeln unter diesen Divisoren befinden.

2) Man setze nachher diese Divisoren statt der unbekannten Größe in die Gleichung, so wird durch denjenigen Divisor, welcher eine der Wurzeln ist, dieselbe = 0 werden; die andern Divisoren aber geben andere Werthe und können also nicht Wurzeln der Gleichung seyn (§. 211. 212.).

Z. B. Es sey die Gleichung $x^4 - 8x^3 + 15x^2 - 24x + 36 = 0$. Die Divisoren von 36 sind: 1. 2. 3. 4. 6. 9. 12. 18. 36. Man versuche es mit $+1$ und -1; aber keins gibt Null, also ist auch keins eine Wurzel. Man versuche es ferner mit $x = +2$, so ist

$$\begin{aligned} x^4 &= 16 \\ -8x^3 &= -64 \\ +15x^2 &= +60 \\ -24x &= -48 \\ +36 &= +36 \end{aligned}$$

$16 - 64 + 60 - 48 + 36 = 112 - 112 = 0$, woraus man ersieht, daß $+2$ eine der Wurzeln und $x - 2 = 0$ ist.

3) Durch diese dergestalt gefundene einfache Wurzelgleichung $x - 2 = 0$ dividire man die gegebene Gleichung; der Quotient ist ohne Rest und

eine Gleichung, welche Einen Grad niedriger ist als die gegebene Gleichung (§. 212.). Wenn im obigen Beyspiel $x^4 - 8x^3 + 15x^2 - 24x + 36 = 0$ durch $x - 2 = 0$ dividirt wird, so gibt der Quotient die kubische Gleichung $x^3 - 6x^2 + 3x - 18 = 0$.

4) Dies letzte Glied zerlege man in seine Divisoren (§ 219.) und versuche, welcher derselben die Gleichung $= 0$ macht; dieser ist die zweyte Wurzel. Durch diese dividire man nach Num. 3. die Gleichung $x^3 - 6x^2 + 3x - 18 = 0$, wodurch man eine neue Gleichung erhält, welche abermals Einen Grad niedriger ist und so fährt man fort, bis man auf eine quadratische Gleichung kommt, deren Wurzel man leicht findet (§ 86. 87.). In der nach Num. 3. gefundenen Gleichung $x^3 - 6x^2 + 3x - 18 = 0$ sind die Divisoren von 18 folgende: 1. 3. 6. 9. 18. Die Zahlen 1 und 3 geben nicht Null, also ist auch keine derselben eine Wurzel; aber durch $x = 6$ erhält man Null; also

$$\begin{aligned} x^3 &= +216 \\ -6x^2 &= -216 \\ +3x &= +18 \\ -18 &= -18 \end{aligned}$$

$$+216 - 216 + 18 - 18 = 0.$$

Also

Also ist $x - 6 = 0$. Durch diese Wurzelgleichung dividire man $x^3 - 6x^2 + 3x - 18 = 0$, so ist der Quotient $x^2 + 3 = 0$, welches $x^2 = -3$ und $x = \pm\sqrt{-3}$ gibt. Die gegebene Gleichung $x^4 - 8x^3 + 15x^2 - 24x + 36 = 0$ hat also zwey mögliche Wurzeln: $x = 2$ und $x = 6$ und ferner zwey unmögliche Wurzeln $x = +\sqrt{-3}$ und $-\sqrt{-3}$ (§. 211. 214.).

Zweytes Beyspiel.

Man verlangt die Wurzeln der Gleichung $x^4 * - 20x^2 * + 64 = 0$. Die Divisoren von 64 sind: 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64 (§. 219.). Man wird finden, daß 1 sich nicht in die Gleichung bringen läßt, aber wohl 2; denn wenn $x = 2$, so ist

$$\begin{aligned} x^4 &= +16 \\ -20x^2 &= -80 \\ +64 &= +64 \\ \hline +16 - 80 &+ 64 = 0. \end{aligned}$$

Also ist $x = 2$ eine der Wurzeln. Durch $x - 2 = 0$ dividire man $x^4 * - 20x^2 * + 64 = 0$, so bekommt man die kubische Gleichung $x^3 + 2x^2 - 16x - 32$. Die Divisoren von 32 sind: 1. 2. 4. 8. 16. 32. Die Zahlen 1 und 2 bringen den Werth der Gleichung nicht auf Null, aber wohl $x = 4$; also

$$\begin{aligned} x^3 &= +64 \\ +2x^2 &= +32 \end{aligned}$$

$$-16x = -64$$
$$-32 = -32$$
$$+64 + 32 - 64 - 32 = 0.$$

Durch $x - 4 = 0$ dividire man die kubische Gleichung $x^3 + 2x^2 - 16x - 32 = 0$, so erhält man die quadratische Gleichung $x^2 + 6x + 8 = 0$, woraus folgt, daß $x^2 + 6x = -8$ und, wenn man auf beyden Seiten 9 addirt, $x^2 + 6x + 9 = 9 - 8 = 1$ und durch Ausziehung der Quadratwurzel $x + 3 = \pm 1$; also $x = -3 \pm 1$. Die Wurzeln der gegebenen Gleichung $x^4 * - 20x^2 * + 64 = 0$ sind also folgende: $x = +2$, $x = +4$, $x = -2$ und $x = -4$.

§. 223.

Diejenigen höhern Gleichungen, welche sich in einfache Gleichungen auflösen lassen und daher als Producte derselben anzusehen sind, heißen **reductible Gleichungen**; solche sind die §. 222. angeführten und aufgelöseten Gleichungen. So ist im zweyten Beyspiel $x^4 * - 20x^2 * + 64 = 0 = (x - 2) . (x + 2) . (x - 4) . (x + 4)$. **Irreductible Gleichungen** sind diejenigen, welche sich nicht in einfache Gleichungen zerlegen lassen und daher auch nicht als ein Product derselben zu betrachten sind. Ist das letzte Glied einer Gleichung eine Primzahl, so ist die Gleichung irreductible; z. B. $x^3 - 2x^2 - 20x + 53 = 0$ ist irreductible. Denn weil 53 ein Product aller drey

Wur-

Wurzeln ist, aber als Primzahl außer 1 und 53 keine andere ganze Zahl zum Factor oder Divisor hat, so läßt sich diese Gleichung nicht in andere einfache Gleichungen, die aus ganzen Zahlen bestehen, auflösen und ihre Wurzeln können keine ganze Zahlen seyn.

Wenn man in einer Gleichung $x^4 + 2x^3 - 36x^2 + 5x - 116 = 0$ das letzte Glied 116 in seine einfachen Factoren 1. 4. 29. 58. 116 auflöset und findet, daß durch keinen derselben die Gleichung sich auf Null bringen läßt, so ist diese Gleichung auch irreductible. Gleichfalls ist $x^3 - 15x^2 + 63x - 50$ irreductible, weil keiner der Divisoren von 50, nämlich 1. 2. 5. 10. 25. 50, die Gleichung auf Null bringt und daher die Wurzeln derselben keine ganze Zahl seyn können. Einige benennen auch die irreductiblen Gleichungen mit dem Namen incommensurable Gleichungen, weil sie sich durch einfache Gleichungen nicht messen lassen.

§. 224.

Es ist eine irreductible höhere Gleichung gegeben; man soll die Wurzeln derselben durch Näherung oder Approximation finden.

1) Statt der unbekannten Größe setze man nach und nach 1, 2, 3, 4, 5, u. s. w. und berechne den Werth der Gleichungen in Zahlen. Hiemit muß man so lange fortfahren, bis der Werth der Gleichung vom Positiven zum Negativen übergeht,

wo

wo dann der Werth der Wurzel zwischen derjenigen Zahl, welche den positiven und derjenigen, welche den negativen Werth gegeben hat, liegen wird.

Es sey die gegebene Gleichung $x^3 - 15x^2 + 63x - 50 = 0$, so ist

$$\begin{array}{l|l} x = 1 & 1 - 15 + 63 - 50 = -1 \\ x = 2 & 8 - 60 + 126 - 50 = +4 \end{array}$$

also fällt die Wurzel zwischen 1 und 2 und ist größer als 1.

2) Man nenne den Bruch, den man zu 1 addiren muß, um den richtigen Werth der Wurzel zu erhalten, $= f$, so ist $x = 1 + f$, welches man statt x in die Gleichung setzt.

$$\begin{array}{rl} x^3 = & 1 + 3f + 3f^2 + f^3 \\ -15x^2 = & -15 - 30f - 15f^2 \\ +63x = & +63 + 63f \\ -50 = & -50 \\ \hline & -1 + 36f - 12f^2 + f^3 = 0. \end{array}$$

Weil nun f ein kleiner Bruch ist, so ist das Quadrat und der Kubus desselben noch viel kleiner und aus der Ursache kann man $12f^2$ und f^3 wegwerfen; also

$$-1 + 36f = 0$$

und $36f = 1$ und $f = \frac{1}{36} = 0{,}027$ und daher $x = 1 + f = 1{,}027$.

3) Will man den Werth von x noch genauer haben, so muß man $f = 0{,}27 + g$ annehmen und die Rechnung noch mal machen.

Zwey-

Zweytes Beyspiel.

Es sey folgende Gleichung $x^3 - 2x - 5 = 0$ gegeben; man soll die Gränzen der Wurzel finden.

$$\begin{array}{l|l} x = 1 & 1 - 2 - 5 = -\ 6 \\ x = 2 & 8 - 4 - 5 = -\ 1 \\ x = 3 & 27 - 6 - 5 = +\ 16. \end{array}$$

Die Wurzel ist also größer als 2 und kleiner als 3. Man nehme nun $x = 2 + f$, so ist

$$\begin{array}{rl} x^3 = & 8 + 12f + 6f^2 + f^3 \\ -2x = & -4 - 2f \\ -5 = & -5 \\ \hline & -1 + 10f + 6f^2 + f^3 = 0. \end{array}$$

Man kann nun $6f^2 + f^3$ wegwerfen; also $-1 + 10f = 0$, $10f = 1$ und $f = \frac{1}{10} = 0,1$.

Um die Wurzel noch näher zu finden, setze man $f = 0,1 + g$ und bringe diesen Werth in die obige Gleichung, so ist

$$\begin{array}{rl} f^3 = & 0,001 + 0,03g + 0,3g^2 + f^3 \\ +6f^2 = & 0,06 + 1,2g + 6g^2 \\ +10f = & 1 + 10g \\ -1 = & -1 \\ \hline & 0,061 + 11,23g + 6,3g^2 + g^3 = 0. \end{array}$$

Man werfe nun $6,3g^2 + g^3$ weg, so ist $0,061 + 11,23g = 0$, also $11,23g = -0,061$ und $g = -\frac{0,061}{11,23} = -0,0054$. Also $x = 2 + f + g = 2 + 0,1 - 0,054 = 2,0946$.

Y

§. 225.

Es gibt noch andere Methoden, durch welche man sich der Wurzel höherer Gleichungen nähern kann.

Man setzt voraus, daß man die Gränzen der Wurzel (§. 224. Num. 1.) und die Gleichung für den Bruch $= f$, wenn man $x = m + f$ nimmt, gefunden hat (§. 224. Num. 2.). Diese Gleichung für kubische Gleichungen war im ersten Beyspiel des vorigen §. $f^3 - 12 f^2 + 36 f - 1 = 0$. Nennt man nun den Coefficienten des zweyten Gliedes $= a$, des dritten Gliedes $= b$ und des letzten Gliedes $= n$, so läßt sich die Gleichung für f auf eine allgemeinere Weise so ausdrücken:

$$f^3 + af^2 + bf - n = 0.$$

Man werfe das Quadrat und den Kubus des sehr kleinen Bruchs f weg und setze $bf - n = 0$, so ist $bf = n$ und $f = \frac{n}{b}$; behält man aber alle Glieder der Gleichung, so ist $f^3 + af^2 + bf = n$ und also $f = \frac{n}{* + af + b}$. Den zuerst gefundenen Werth setze man nun in diese Gleichung, so ist $f = n : \left(\frac{n^2}{b^2}{}^{*} + \frac{an}{b} + b\right)$; man bringe die Divisoren auf gleiche Benennung (§. 11.), so ist $f = n : \left(\frac{n^2}{b^2} + \frac{abn}{b^2} + \frac{b^3}{b^2}\right)$ und wenn man die Division verrichtet (§. 13.), so ist

f

$$f = \frac{b^2 n}{b^3 + abn + n^3}.$$

Nach dieser Formel kann man sich dem Werthe der Wurzel einer kubischen Gleichung nähern.

Z. B. In dem zweyten Beyspiel des vorigen §. war die gegebene kubische Gleichung $x^3 - 2x - 5 = 0$ und wenn man $x = 1 + f$ setzte, so erhielt man folgende Gleichung für f, nämlich $f^3 + 6f^2 + 10f - 1 = 0$ und vergleicht man diese Gleichung mit der allgemeinen Formel $f^3 + af^2 + bf - n = 0$, so ist $a = 6$, $b = 10$ und $-n = -1$; also nach obiger Formel

$$f = \frac{100 \cdot 1}{1000 + 60 + 1} = \frac{100}{1061} = 0{,}0944,$$

also $x = 1 + f = 1{,}0944$, welche Wurzel schon in den ersten drey Decimalen zuverlässig ist.

Gleichfalls kann man eine Approximations-Formel für Gleichungen des vierten Grades finden.

Die Wurzel sey $x = m + f$ und die Gleichung für f sey

$$f^4 + af^3 + bf^2 + cf - n = 0.$$

Aus gleicher Ursache, wie bey den kubischen Gleichungen, ist $cf - n = 0$ und $f = \frac{n}{c}$. Aus der ersten Gleichung folgt

$$f^4 + af^3 + bf^2 + cf = n \text{ und}$$

$$(f^3 + af^2 + bf + c) . f = n \text{ und}$$

$$f = \frac{n}{f^3 + af^2 + bf + c.}$$

In diese Gleichung für f bringe man den andern gefundenen Werth für $f = \frac{n}{c}$, so ist

$$f = n : \left(\frac{n^3}{c^3} + \frac{an^2}{c^2} + \frac{bn}{c} + c\right)$$

$$f = n : \left(\frac{n^3 + acn^2 + bc^2n + c^4}{c^3}\right).$$

$$f = \frac{nc^3}{n^3 + acn^2 + bc^2n + c^4.}$$

Auf eben die Art kann man **Approximations-Formeln für Gleichungen des fünften, sechsten u. s. w. Grades finden.**

Es gibt noch verschiedene andere Approximations-Methoden, die hier aber der Kürze halber übergangen werden.

Anmerk. Da die höhern Gleichungen keine vorzügliche Anwendung in der practischen oder angewandten Mathematik leiden, so sind sie hier nur kürzlich berührt worden. Verlangt man hierüber vollständigern Unterricht, so kann man ihn in **L. Eulers Anleitung zur Algebra,** 2ter Theil, 6-16tes Kap. Leçons élementaires de Mathematiques, par Mr. l'Abbé Marie. Paris 1784. p. 205-241. Traité élemen-

elementaire d'Algebre, par Mr. Bossut. Paris 1773. p. 218-391. C. Scherffer Institutionum analyticarum P. I. Viennae 1770. p. 189-252. Cours complet de Mathematiques, par Mr. l'Abbé Sauri. Tom. I. Paris 1774. p. 209-290. Die abstracteste Theorie der höhern Gleichungen und die Beweise ihrer Eigenschaften findet man in Bezout Théorie générale des equations algebriques. Paris 1789. Eine gute und vollständige Theorie der höhern Gleichungen findet man in dem **Unterricht in der mathematischen Analysis von J. Mitterpacher von Mitternburg, herausgegeben von Pasquich.** Leipzig 1790. 1r Band p. 241-386; 2r Bd. Leipzig 1791. Dies Werk verdient als eine der besten und gründlichsten analytischen Schriften empfohlen zu werden. Es ist jetzt nur noch übrig, einige wenige Aufgaben hinzuzufügen, welche sich nicht ohne höhere Gleichungen auflösen lassen.

§. 226.

Die Anzahl Ducaten, die A hat, ist 18 größer als B's Anzahl von Ducaten; multiplicirt man aber die Summe dieser Zahlen mit der Differenz ihrer Kubi, so erhält man 275184; man fragt, wie viele Ducaten A und B haben?

Man nenne die Anzahl von A's Ducaten $= x$, so ist B's Anzahl $= x + 18$; der Unterschied der Kubi dieser beyden Zahlen ist $= 54 x^2 + 972 x + 5832 = 54 \cdot (x^2 + 18 x + 108)$. Diese Zahl multiplicire man mit der Summe der Ducaten beyder $= x + x + 18 = 2 x + 18 = 2 \cdot (x + 9)$. Dieses Product soll $= 275184$ seyn; also $54 \cdot (x^2 + 18 x + 108) \cdot 2 \cdot (x + 9) = 108 \cdot (x^3 + 27 x^2 + 270 x + 972) = 275184$; man dividire durch 108, so ist $x^3 + 27 x^2 + 270 x + 972 = 2548$ und $x^3 + 27 x^2 + 270 x - 1576 = 0$. Wenn man diese kubische Gleichung auflösen will, so muß man die Divisoren von 1576 finden (§. 219.), welche sind: 1. 2. 4. 8. u. s. w. Man nehme nun $x = 1$, $x = 2$, u. s. w. und sehe zu, ob das Null gibt (§. 211.).

$$\begin{array}{rcr} x & = & 1 \\ \hline x^3 & = & 1 \\ 27\,x^2 & = & 27 \\ 270\,x & = & 270 \\ -\,1576 & = & -\,1576 \\ \hline & & 1278 \end{array} \qquad \begin{array}{rcr} x & = & 2 \\ \hline x^3 & = & 8 \\ 27\,x^2 & = & 108 \\ 270\,x & = & 540 \\ -\,1576 & = & -\,1576 \\ \hline & & 920 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcr} x & = & 4 \\ \hline x^3 & = & 64 \\ 27\,x^2 & = & 432 \\ 270\,x & = & 1080 \\ -\,1576 & = & -\,1576 \\ \hline & & 0. \end{array}$$

Man

Man sieht, daß $x = 4$ eine Wurzel ist; dividirt man nun die kubische Gleichung durch $x - 4 = 0$, so erhält man die quadratische Gleichung $x^2 + 31x + 394 = 0$; also $x^2 + 31x = -394 = -\frac{1376}{4}$. Löset man diese unvollständige quadratische Gleichung auf, so wird man $x = -\frac{31}{2} \pm \sqrt{-\frac{615}{4}}$ finden; die beyden andern Wurzeln sind also unmöglich (§. 211. 214.) und die obige kubische Gleichung hat nur eine wirkliche Wurzel $x = 4$, welches A's Anzahl von Ducaten ist; B's Anzahl ist also $= x + 18 = 4 + 18 = 22$.

§. 227.

Einige Kaufleute schießen zu einem Handel ein Kapital zusammen, und zwar jeder derselben zehnmal so viele Reichsthaler als Interessenten da sind; auf jede 100 Rthl. gewinnen sie so viele Rthl. als Interessenten da sind, und noch 6 Rthl. mehr; der ganze Gewinn beträgt 392 Rthl.; man fragt nach der Anzahl der Interessenten.

Die Anzahl der Interessenten sey $= x$, so gibt jeder derselben $10x$ Rthl. her, und der ganze Einschuß beträgt $10x^2$ Rthl.; da nun jeder $x + 6$ Rthl. auf jede 100 Rthl. gewinnt, so kann man durch Hülfe der Regel Detri ihren Vortheil und Gewinn berechnen, nämlich

$$100 : x + 6 = 10x^2 : \frac{10x^3 + 60x^2}{100} = \frac{x^3 + 6x^2}{10} = 392;$$

also $x^3 + 6x^2 = 3920$ und $x^3 + 6x^2 - 3920 = 0$.

Dies

Dies ist also eine kubische Gleichung, welche man auf eine kürzere Weise auflösen kann, wenn man $x = 2z$ setzt; also $8z^3 + 24z^2 - 3920 = 0$, und, wenn man durch 8 dividirt, $z^3 + 3z^2 - 490 = 0$. Die Divisoren von 490 sind 1. 2. 5. 7. 10. u. s. w. (§. 219.), welche man in die Gleichung setzt.

$z = 1$	$z = 2$
$z^3 = 1$	$z^3 = 8$
$3z^2 = 3$	$3z^2 = 12$
$-490 = -490$	$-490 = -490$
-485	-470

$z = 5$	$z = 7$
$z^3 = 125$	$z^3 = 343$
$3z^2 = 75$	$3z^2 = 147$
$-490 = -490$	$-490 = -490$
-290	$0.$

Also ist 7 eine der Wurzeln, und wenn man die kubische Gleichung $z^3 + 3z^2 - 490 = 0$ durch $z - 7 = 0$ dividirt, so gibt der Quotient eine quadratische Gleichung $z^2 + 10z + 70 = 0$, also $z^2 + 10z = -70$, und, wenn man diese Gleichung auflöset, $z = -5 \pm \sqrt{-45}$; die beyden andern Wurzeln sind also unmöglich. Da nun $x = 2z = 14$ ist, so ist die Anzahl der Interessenten 14.

Hamburg,
gedruckt bey Gottlieb Friedrich Schniebes.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Bugge, Thomas,

Lehrbuch der gesammten Mathematik oder Vorlesungen über die mathematischen Wissenschaften

Bd.: 2,1

Altona 1800

Math.u. 36 h-2,1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10593754-5
VD18 1206033X-001